Dienger

Studien

zur

analytischen Mechanik.

Studien

zur

analytischen Mechanik.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1863.

Vorwort.

Bei der Veröffentlichung dieser kleinen Schrift habe ich einen doppelten Zweck verfolgt. Einerseits wollte ich die allgemeinen Gesetze der Bewegung nach den heutigen analytischen Methoden darstellen, und in so ferne ist dieselbe eine Art Ergänzung dessen, was ich im dritten Bande meiner Differential- und Integralrechnung (Stuttgart, Metzler'sche Buchhandlung 1862) mehrfach berührt habe. Anderseits aber wollte ich zeigen, dass man ohne die „unendlich kleinen Grössen" (Variationen, Differentiale u. s. w.) in der analytischen Mechanik nicht nur vollständig ausreicht, was vielfach bestritten wird, sondern dass die ganze Betrachtung, wenn auch nicht immer vereinfacht, doch sicher klarer und durchsichtiger wird. In dieser Beziehung war die Auswahl der einzelnen Probleme natürlich ziemlich willkürlich, und ich habe desshalb auch nicht alle behandelt, die hieher gehört hätten. Ich hatte eben nicht die Absicht, ein Lehrbuch der analytischen Mechanik zu schreiben, hoffe aber, dass mit Berücksichtigung der beabsichtigten Zwecke die Schrift einigen Nutzen stiften kann.

Karlsruhe, Juli 1863.

Inhalts-Verzeichniss.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

§. 1.

Grundformeln.

I. Sei p das Gewicht eines Massenpunktes m, dessen rechtwinklige Koordinaten zur Zeit t seien x, y, z; die Resultirende aller auf diesen Punkt wirkenden Kräfte habe zu Seitenkräften nach den drei Axen: X, Y, Z; g sei die bekannte Beschleunigung durch die Schwerkraft. Alsdann hat man als Gleichungen der Bewegung dieses Punktes:

$$\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ \frac{p}{g}\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{1}$$

wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z, t sein können, x, y, z selbst aber Funktionen der (einen) unabhängig Veränderlichen t sind. Daneben können X, Y, Z auch noch von den Koordinaten anderer Massenpunkte, die mit dem betrachteten in Verbindung stehen — mit ihm ein System bilden — abhängen.

Die (1) sind unbedingt giltig, und sie bestimmen die Bewegung des betrachteten Punktes vollständig, so dass wir weitere Gleichungen nicht mehr aufzusuchen haben, vielmehr alles Uebrige aus diesen (1) ableiten müssen.

Betrachtet man ein zusammengehöriges System von n einzelnen Massenpunkten (n kann ganz wohl unendlich gross sein), so gelten für jeden einzelnen Punkt drei Gleichungen von der Form der (1), welche Gleichungen somit der Anzahl nach 3n sein werden. Ihre Integration liefert die 3n Koordinaten als Funktionen der Zeit, also Alles, was zur genauen Bestimmung der Bewegung eines jeden einzelnen Punktes nothwendig ist.

Kräfte.

II. Die Kräfte, welche auf den Punkt m wirken, theilen wir in innere und äussere ab. Die erstern rühren von den gegenseitigen Einwirkungen der Massenpunkte des Systems auf einander her, wenn wir bei dieser bildlichen

Vorstellung stehen bleiben, ohne uns über das eigentliche Wesen dieser Kräfte genauer aussprechen zu wollen. Die letztern sind dem Systeme, dem wir m zurechnen, fremd, d. h. sie haben ihren Grund und Sitz ausserhalb des Systems. Doch legen wir dieser Eintheilung der wirksamen Kräfte kein übergrosses Gewicht bei, da bei der Aufstellung der (1) eben nur nothwendig ist, alle Kräfte, die auf den Massenpunkt wirken, gehörig zu beachten.

Dabei muss bemerkt werden, dass das was hier ein System von Massenpunkten genannt wird, in willkürlicher Weise begränzt gedacht werden kann. Wir können einen festen Körper als ein solches ansehen; wir können auch mehrere solcher einzelner festen Körper als zusammen gehörig betrachten; ja wir können einen beliebigen Theil eines derselben als ein für sich abgeschlossenes System untersuchen u. s. w.

Die von den gegenseitigen Einwirkungen zweier Punkte auf einander herrührenden Kräfte betrachten wir immer als wirkend in der Richtung der Verbindungslinie beider Punkte. Solche Kräfte wirken mit gleicher Stärke (Intensität), jedoch in entgegengesetzten Richtungen auf beide Punkte.

Ist ein Punkt gezwungen, auf einer gegebenen Fläche (oder Kurve) zu bleiben, so übt er senkrecht auf dieselbe einen Druck aus, indem der Zwang daher rührt, dass die Fläche auf ihn nach der bemerkten Richtung wirkt, und er daher wieder auf die Fläche. Die Richtung ist noch genauer dadurch bestimmt, dass dieser Zwang den Punkt gegen die Fläche andrücken muss.

Bei der Bewegung auf einer körperlichen Fläche setzt sich der fortschreitenden Bewegung ein Widerstand entgegen, der in derjenigen Richtung wirkt, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Dieser Widerstand heisst die Reibung, und ist gleichfalls unter die wirksamen Kräfte zu zählen. Sie gehört in der Regel zu den äussern Kräften.

Sind zwei Massenpunkte gezwungen, beständig in derselben Entfernung von einander zu bleiben, und würden sie ohne Zwang nicht in diesem Verhältnisse bleiben, so äussert sich der Zwang in einer Spannung zwischen denselben. Dieselbe gehört hiernach offenbar zu den innern, durch gegenseitige Einwirkung entstandenen Kräften. Ihre Richtung ist die der Verbindungslinie.

Druck und Reibung können zu den äussern oder innern Kräften des Systems gerechnet werden, je nachdem die Fläche, die dazu Veranlassung gibt, nicht zum Systeme gehört oder mit demselben vereinigt ist.

Die gegenseitigen Einwirkungen der Punkte müssen wir hier als bekannt ansehen. Kennen wir auch thatsächlich das Gesetz dieser Wirkung nicht, so müssen wir doch als möglich voraussetzen, es werde einst gelingen dasselbe zu erforschen, und müssen es also, von dem allgemeinen Standpunkte aus, als bereits bekannt betrachten. Dessgleichen müssen wir die Reibung als eine bekannte Kraft ansehen.

Anders verhält es sich mit Druck und Spannung, welch letztere gewissermassen auch ein Druck ist. Diese Kräfte hängen von dem Zustande der Bewegung offenbar ab, und können desshalb auch nicht zum Voraus als bekannt angesehen, oder als bekannt behandelt werden. Sie treten sonach als unbekannte (d. h. noch zu bestimmende) Grössen in die Gleichungen (1) ein.

Die äussern Kräfte sehen wir als unbedingt bekannt an.

Bedingungsgleichungen.

III. Bei der Ermittlung der Bewegung eines Systems von n Punkten können hiernach ausser den 3n Koordinaten noch weitere Unbekannte zu bestimmen sein. Daraus folgt, dass man ausser den 3n Gleichungen (1) noch weitere Gleichungen werde aufstellen müssen. Diess ist auch für jede weiter eintretende Unbekannte durchaus möglich, wenn anders der Bewegungszustand ein bestimmter ist.

So wenn ein Punkt gezwungen ist auf einer bestimmten und gegebenen Fläche zu bleiben, müssen seine Koordinaten der Gleichung der Fläche genügen. Diess ist dann die fragliche weitere Gleichung, welche wegen des eintretenden unbekannten Druckes nothwendig wird.

Müssen zwei Punkte in unveränderlichem Abstande a bleiben, und besteht desshalb eine Spannung zwischen beiden, so werden die Koordinaten x, y, z; x′, y′, z′ der beiden Punkte der Gleichung

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=a^2 \qquad (2)$$

zu genügen haben (zu jeder Zeit t). Diess ist die weitere Gleichung. Man kann aber diesen Fall leicht auf den vorigen zurückführen, indem man sagt, es müssten die beiden Punkte je auf einer (veränderlichen) Kugelfläche vom Halbmesser a liegen, deren Mittelpunkt sich in dem andern Punkte befindet. Die beiden Drucke (Spannung) sind dann gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. So wird überhaupt für jede weiter einzuführende Unbekannte sich nothwendig auch eine weitere Bedingungsgleichung ergeben.

Analytischer Ausdruck der Kräfte.

IV. Wir bezeichnen die n Punkte des Systems durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$; ebenso die Koordinaten des r^{ten} Punktes (zur Zeit t) durch x_r, y_r, z_r. Wirken nun die Punkte m_r, m_s auf einander ein, so wollen wir die Stärke dieser Einwirkung durch $P_{r,s}$ bezeichnen, wo also, nach dem allgemeinen Satze gleicher gegenseitiger Einwirkung,

$$P_{r,s}=P_{s,r} \qquad (3)$$

sein wird. Dabei denken wir uns $P_{r,s}$ als positiv, wenn sich die beiden Punkte anziehen; als negativ, wenn sie sich abstossen. Für die Seitenkräfte erhält man hiernach bei der Wirkung

$$\left.\begin{array}{l} \text{auf } m_r: -P_{r,s}\frac{x_r-x_s}{\varrho_{r,s}},\quad -P_{r,s}\frac{y_r-y_s}{\varrho_{r,s}},\quad -P_{r,s}\frac{z_r-z_s}{\varrho_{r,s}};\\ \;\;\text{„}\;\; m_s: -P_{r,s}\frac{x_s-x_r}{\varrho_{r,s}},\quad -P_{r,s}\frac{y_s-y_r}{\varrho_{r,s}},\quad -P_{r,s}\frac{z_s-z_r}{\varrho_{r,s}}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

wo $\varrho_{r,s}$ die gegenseitige Entfernung ist, d. h.

$$\varrho_{r,s}=\sqrt{(x_r-x_s)^2+(y_r-y_s)^2+(z_r-z_s)^2}, \tag{5}$$

und die Quadratwurzel (wie immer) nur positiv genommen wird.

Aus (4) und (5) ergibt sich unmittelbar, dass die Seitenkräfte der hier betrachteten Wirkung sind

$$\left.\begin{array}{l} \text{auf } m_r: -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r},\quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r},\quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r};\\ \;\;\text{„}\;\; m_s: -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_s},\quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_s},\quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_s}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Gewöhnlich setzt man

$$P_{r,s}=\frac{p_r}{g}\frac{p_s}{g}f(\varrho_{r,s}), \tag{7}$$

wo p_r, p_s die Gewichte der beiden Punkte bedeuten.

Den Quotienten des Gewichts durch g nennt man die Masse des Punktes, und wir wollen setzen.

$$\frac{p_r}{g}=m_r, \tag{8}$$

also mit m_r die Masse des Punktes bezeichnen den wir m_r nannten, wobei wohl keine Zeichenverwirrung eintreten wird.* Wir verbreiten uns über den Begriff der Masse nicht weiter, da wir hier überhaupt diese Dinge als bereits erledigt ansehen. Alsdann ist im Allgemeinen

$$P_{r,s}=m_r m_s f(\varrho_{r,s}). \tag{7'}$$

V. Sei

$$f(x,y,z)=0, \text{ oder kürzer } u=0$$

die Gleichung einer Fläche, auf welcher der Punkt m_r bleiben muss (eine Gleichung in der auch t vorkommen kann, in welchem Falle die Fläche ihre Gestalt mit der Zeit ändert). Alsdann muss immer

$$f(x_r,y_r,z_r)=0, \text{ oder kürzer } u_r=0 \tag{9}$$

sein. In Folge dieses Zwanges wird auf den Punkt m_r eine Wirkung (Druck) ausgeübt, die wir durch D_r bezeichnen wollen, und die senkrecht zur Fläche

* Was Masse sei ist ein viel besprochener und bestrittener Punkt. Für uns ist Gewicht eine Kraft so beschaffen, dass sie dem Massenpunkte wenn sie unverändert auf ihn wirkt und er sich in der Richtung ihrer Wirkung bewegt, eine Beschleunigung g der Geschwindigkeit mittheilt. Masse ist dann Gewicht, durch g dividirt, hängt also dem Zahlenausdrucke nach von zwei Einheiten ab. Die Kräfte denken wir uns durch Gewichte gemessen.

gerichtet ist. Daraus folgt, dass diese Kraft mit den Richtungen der Koordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$\frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad \frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad \frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial z_r}; \quad \text{wo } k_r = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_r}{\partial y_r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z_r}\right)^2}, \tag{10}$$

und das Zeichen von k_r so zu wählen ist, dass der Punkt gegen die Fläche gedrückt wird. Dabei ist D_r kurzweg als positiv behandelt.

Die Seitenkräfte sind hiernach

$$\frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad \frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad \frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial z_r}, \tag{11}$$

oder wenn

$$\frac{D_r}{k_r} = S_r:$$

$$S_r\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad S_r\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad S_r\frac{\partial u_r}{\partial z_r}. \tag{11'}$$

Hiebei haben wir vorausgesetzt, dass in (9) ausser den Koordinaten des Punktes m_r keine der Koordinaten eines andern Punktes des Systems vorkommen, also auch die Bedingungsgleichung (9) nur bei diesem Punkte in Anwendung komme.

VI. Ist der Punkt m_r überhaupt in seiner Bewegung derart beschränkt, dass seine Koordinaten beständig der Gleichung

$$u_e = 0 \tag{9'}$$

genügen müssen, wo in u_e ausser x_r, y_r, z_r auch noch die Koordinaten anderer Punkte des Systems vorkommen können (nebst etwa der Zeit t), so kann man die Sache immer so ansehen, dass für einen bestimmten Augenblick m_r auf derjenigen Fläche liegen müsse, welche durch (9′) bestimmt ist, wenn man in dieser Gleichung nur die Koordinaten des Punktes m_r als veränderlich, die aller übrigen Punkte dagegen (für den Augenblick) als unveränderlich ansieht. Daraus folgt dann, dass die Seitenkräfte der in Folge des Zwanges auf m_r ausgeübten Wirkung sein werden

$$S\frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \tag{12}$$

wo S allerdings von der Form der Funktion u_e sowohl, als auch den Koordinaten des Punktes m_r abhängt.

Die Formel (12) umfasst alle möglichen Fälle, also natürlich auch den der Spannungen, bezüglich den der Bedingungsgleichungen (2). Dabei müssen wir jedoch sofort darauf aufmerksam machen, dass wenn in (9′) die Koordinaten der Punkte m_r und m_s vorkommen, allerdings die Seitenkräfte der auf m_s ausgeübten Wirkung auch sind

$$S\frac{\partial u_e}{\partial x_s}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial y_s}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial z_s},$$

es sich aber nicht kurzweg von selbst versteht, dass das jetzige S dem in

(12) gleich sei (vergl. VIII). Wir werden desshalb vorläufig das eine durch $S_{e,r}$, das andere durch $S_{e,s}$ bezeichnen.

VII. Sind hiernach X_r, Y_r, Z_r die Seitenkräfte der äussern auf m_r wirkenden Kräfte (zu denen Reibung gehören soll); $P_{r,s}$ die in IV näher bestimmten, S die in VI betrachteten, so stellen sich die (1) unter die Form

$$\left.\begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{d t^2} &= X_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{d t^2} &= Y_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{d t^2} &= Z_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

wo das erste Summenzeichen sich auf alle möglichen s, d. h. auf alle Punkte bezieht, die auf m_r anziehend oder abstossend wirken, das zweite dagegen auf alle möglichen e, d. h. auf alle Bedingungsgleichungen der Form (9'), in denen die Koordinaten des Punktes m_r vorkommen. Die P sind als bekannte, die S als zu bestimmende Grössen zu behandeln.

Beweis, dass $S_{e,r} = S_{e,s}$.

VIII. Wir haben in VI darauf aufmerksam gemacht, dass zwar wohl in den sich auf m_r beziehenden Gleichungen (a) die Grösse S dieselbe bleibt für dasselbe u, dass aber in den auf m_s sich beziehenden Bewegungsgleichungen die Grösse S, auch wenn dasselbe u dort vorkommt, nicht ohne Weiteres auch als dasselbe mit dem vorhergehenden darf angenommen werden. Wir haben also hier zuerst diese Frage zu erörtern und wollen beweisen, dass in den Bewegungsgleichungen aller Punkte, deren Koordinaten derselben Gleichung $u = 0$ genügen müssen, auch das in ihnen bei den partiellen Differentialquotienten von u als Faktor vorkommende S denselben Werth habe.

Um diesen Beweis führen zu können, müssen wir Betrachtungen einflechten, auf die wir in §. 12 in allgemeinerer Weise zurückkommen werden, die wir also hier dem besondern Gesichtspunkte anpassen wollen.

Gesetzt zur Zeit t werden plötzlich alle Koordinaten der einzelnen Punkte fest, d. h. es höre alle Bewegung und die Wirkung sämmtlicher innern und äussern Kräfte auf, so dass nur die Kräfte der Verbindungen, d. h. die (12) bleiben. Alsdann wird das ganze System in Ruhe bleiben, d. h. diese Kräfte allein sind nicht im Stande, irgend eine Bewegung der Punkte, auf die sie wirken, hervorzurufen. Dieser Grundsatz, auf den wir uns stützen wollen, liegt ganz offenbar in dem oben festgestellten Begriff dieser Kräfte.

Wir werden uns also, wie so eben, zur Zeit t plötzlich alle äussern und innern Kräfte, so wie alle Geschwindigkeiten aufgehoben denken und dann

nur die Kräfte der Verbindungen wirksam sein lassen. Da keine Bewegung eintreten wird, so bleiben die sämmtlichen Koordinaten, was sie waren, so dass natürlich in den Bedingungsgleichungen (9′) eine Aenderung derselben nicht einzutreten hat, mithin auch das etwa dort vorkommende t ungeändert bleibt.

Um aber die in Folge dieser Eigenschaft zwischen den Kräften der Verbindungen bestehenden Beziehungen aufzufinden, wollen wir uns einmal den Fall als möglich denken, dass doch Bewegung unter dem Einfluss der genannten Kräfte eintrete.

Wir rechnen alsdann die Zeit, die wir durch τ bezeichnen wollen, von dem Augenblicke an (Zeit t), wo wir alle Geschwindigkeiten aufhoben, und sei dann v_r die Geschwindigkeit von m_r zur Zeit τ (für $\tau = 0$ ist nothwendig $v_r = 0$). Soll aber nie Bewegung eintreten, also v_r immer Null sein, und zwar für alle Punkte m_r, so kann man diess unmittelbar an dem Werthe von v_r untersuchen, oder aber auch die Summe

$$\frac{1}{2} \Sigma m_r v_r^2 \tag{b}$$

näher betrachten, in der das Summenzeichen sich auf alle r, d. h. auf alle Punkte des Systems bezieht. Ist diese Summe Null, so ist — da sie nur aus positiven Gliedern besteht — nothwendig jedes v_r gleich Null.

Sieht man (b) als Funktion der Zeit τ an, und kann etwa beweisen, dass diese Funktion konstant ist, und weiss zudem, dass sie einmal (für $\tau = 0$) Null ist, so hat man auch bewiesen, dass sie immer Null ist. Damit (b) konstant sei, muss

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \Sigma m_r v_r^2 = 0, \quad \text{d. h. } \Sigma m_r v_r \frac{d v_r}{d\tau} = 0 \tag{c}$$

sein. Wir haben also bloss zu zeigen, dass unter dem alleinigen Wirken der Kräfte der Verbindungen die (c) nothwendig erfüllt ist.

Die Gleichungen der Bewegung (wenn dieselbe vorhanden) wären für m_r:

$$m_r \frac{d^2 x_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \quad m_r \frac{d^2 z_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \tag{d}$$

wo das Summenzeichen wie in (a) genommen ist, und x_r, y_r, z_r die Koordinaten zur Zeit τ bedeuten. Dabei muss in u_e das etwa vorkommende t mit seinem, dem Anfang dieser (vermeintlichen) Bewegung entsprechenden Werthe genommen werden, d. h. wir müssen die Flächen, welche durch die Bedingungsgleichungen ausgedrückt sind, als unveränderlich (wie sie zur Zeit t waren) ansehen, wie wir denn auch nur die Kräfte betrachten, wie sie zur Zeit t beschaffen waren, was Alles um so leichter einzusehen ist, da thatsächlich diese Bewegung nicht besteht, also τ nicht einmal einen unendlich kleinen Werth haben kann.

Nun ist

$$v_r^2 = \left(\frac{d x_r}{d \tau}\right)^2 + \left(\frac{d y_r}{d \tau}\right)^2 + \left(\frac{d z_r}{d \tau}\right)^2, \quad v_r \frac{d v_r}{d \tau} = \frac{d x_r}{d \tau} \frac{d^2 x_r}{d \tau^2} + \frac{d y_r}{d \tau} \frac{d^2 y_r}{d \tau^2} + \frac{d z_r}{d \tau} \frac{d^2 z_r}{d \tau^2},$$

und aus den (d):

$$\Sigma m_r v_r \frac{d v_r}{d \tau} = \Sigma_r \Sigma_e S_{e,r} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r} \frac{d x_r}{d \tau} + \frac{\partial u_e}{\partial y_r} \frac{d y_r}{d \tau} + \frac{\partial u_e}{\partial z_r} \frac{d z_r}{d \tau}\right),$$

wo das innere Summenzeichen sich auf alle e, das äussere auf alle r bezieht.

Wegen (c) muss also

$$\Sigma_r \Sigma_e S_{e,r} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r} \frac{d x_r}{d \tau} + \frac{\partial u_e}{\partial y_r} \frac{d y_r}{d \tau} + \frac{\partial u_e}{\partial z_r} \frac{d z_r}{d t}\right) = 0 \qquad \text{(e)}$$

sein, wobei natürlich gemeint ist, dass die hier vorkommenden Koordinaten den Bedingungsgleichungen (in denen nur t als fest angesehen wird) genügen, d. h. die gedachten Bewegungen als zu den mit den Bedingungen des Systems verträglichen zu rechnen sind.

Die Gleichung (e) kann in so viele Einzelglieder aufgelöst werden, als e Werthe hat. Kommen so etwa in der Funktion u_1 die Koordinaten der Punkte m_α, m_β, m_γ, ... vor, so heisst das betreffende Einzelglied:

$$S_{1,\alpha} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{d x_\alpha}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\alpha} \frac{d y_\alpha}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha} \frac{d z_\alpha}{d \tau}\right)$$

$$+ S_{1,\beta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\beta} \frac{d x_\beta}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\beta} \frac{d y_\beta}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\beta} \frac{d z_\beta}{d \tau}\right) + \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(f)}$$

Zugleich aber besteht nothwendig die aus $u_1 = 0$ hervorgehende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{d x_\alpha}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\alpha} \frac{d y_\alpha}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha} \frac{d z_\alpha}{d \tau}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\beta} \frac{d x_\beta}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\beta} \frac{d y_\beta}{d \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\beta} \frac{d z_\beta}{d \tau}\right) + \ldots = 0, \qquad \text{(f')}$$

und so für die andern Werthe von e (dem Zeiger an u).

Daraus folgt sofort, dass wenn allgemein

$$S_{e,r} = S_{e,s}, \qquad \text{(g)}$$

nach (f') die (f) identisch Null, d. h. die (e) sofort erfüllt ist; dass aber wenn (g) nicht stattfindet, man bei dem thatsächlichen Bestehen der (f') der (e) nur genügen könnte, indem man gewisse Beziehungen zwischen den Koordinaten und τ feststellte. Diess hiesse aber eine Bewegung zulassen, was wir nicht dürfen. [Wir müssen und dürfen hiebei die S in (e) als unveränderlich uns denken.]

Damit ist der Beweis geführt und wir fügen nur noch einige Bemerkungen hinzu. Wir sahen oben bei der Bildung von (f') das etwa in u_e vorkommende t als unveränderlich an, und ebenso die S. Wir müssen diess. Denn unser Beweis kommt im Grunde darauf hinaus, dass unter dem alleinigen Einflusse der Kräfte der Verbindungen, wie sie zur Zeit t beschaffen sind, keine Bewegung eintreten

kann. Wenn wir also doch eine Bewegung hypothetisch annehmen, so müssen wir die S und die Flächen genau so lassen wie sie zur Zeit t sind, d. h. also in den Gleichungen der letztern das etwa darin vorkommende t nicht ändern. Dann zeigen wir, dass unter der Annahme des Bestehens der (g) die (c) erfüllt ist, also die Hypothese einer Bewegung nicht zulässig ist.

Wie schon gesagt, werden wir später (§. 12) auf diese Untersuchungen zurückkommen.

Allgemeine Form der Bewegungsgleichungen.

IX. Die Gleichungen (a), d. h. die (1) heissen also jetzt:

$$\left.\begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= X_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= Y_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= Z_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial z_r}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Darin sind x_r, y_r, z_r die Koordinaten des Punktes m_r zur Zeit t (rechtwinklige Koordinaten, da sonst die letzten Glieder anders gestaltet wären); $P_{r,s}$ ist die in IV betrachtete Kraft, Einwirkung der Punkte m_r und m_s auf einander; $\varrho_{r,s}$ ist durch (5) gegeben; das Summenzeichen Σ_s bezieht sich auf alle Punkte m_s, die auf m_r wirken; $u_e = 0$ ist eine der Bedingungsgleichungen, von denen in III, V, VI gesprochen wurde; das Summenzeichen Σ_e bezieht sich auf alle u, in denen die Koordinaten des Punktes m_r vorkommen; S_e ist eine noch zu bestimmende Grösse, die für dasselbe u_e in allen möglichen Gleichungen der Bewegung (der Anzahl nach 3 n) denselben Werth hat.

Aus VIII ergibt sich sofort, dass wenn die Koordinaten der Punkte m_α, m_β, ... derselben Gleichung $u_e = 0$ genügen, die Drucke, welche in Folge dessen auf die Punkte ausgeübt werden, zusammenhängen mittelst der Beziehung:

$$\frac{D_\alpha}{k_\alpha} = \frac{D_\beta}{k_\beta} = \frac{D_\gamma}{k_\gamma} = \ldots.,$$

wo

$$k_\alpha^2 = \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial z_\alpha}\right)^2,$$

u. s. w.

Bemerkung für den Fall der Bewegung auf einer festen Kurve.

X. Ist der Punkt m gezwungen auf einer Kurve zu bleiben, deren Gleichungen

$$u = 0, \quad w = 0 \qquad \text{(h)}$$

sind, die also von seinen Koordinaten (die wir kurzweg x, y, z nennen) zu aller Zeit erfüllt sein müssen, so ist die Aufgabe dieselbe, als wenn der Punkt auf den zwei Oberflächen, deren Gleichungen die (h) sind, bleiben muss. Diess ändert an

den (13) durchaus Nichts, da jetzt eben die beiden, u und w entsprechenden Glieder eintreten.

Ist D_1 der Druck auf die Fläche $u = 0$, D_2 der auf $w = 0$, so hat man in (13) die zwei Glieder

$$\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Resultirende von D_1 und D_2 stellt den eigentlichen Druck auf die Kurve (Zwang auf den Punkt) dar. Ist dieselbe gleich D, und sind α, β, γ die Winkel ihrer Richtung mit den Koordinatenaxen, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x}&=D\cos\alpha,\\ \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y}&=D\cos\beta,\\ \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}&=D\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\quad\text{(i)}$$

Sind $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ die Werthe der beiden Differentialquotienten von y und z, gezogen aus den (h), so folgt aus den (i) ganz unmittelbar:

$$\cos\alpha+\cos\beta\frac{dy}{dx}+\cos\gamma\frac{dz}{dx}=0,$$

so dass also D senkrecht zur Tangente an die Kurve gerichtet ist, wie sich diess offenbar aus der Natur der Sache ergibt. Man kann nun entweder die beiden Unbekannten D_1, D_2 (S_1, S_2 in den Bewegungsgleichungen) einführen, oder die vier: D, α, β, γ, zwischen denen dann noch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta\frac{dy}{dx}+\cos\gamma\frac{dz}{dx}&=0,\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma&=1,\end{aligned}\right\}\quad\text{(k)}$$

bestehen, die mit $u = 0$, $w = 0$ die vier jenen weitern Unbekannten entsprechenden Gleichungen bilden. Für unsere allgemeine Darstellung ist es wohl bequemer, die erste Form beizubehalten.

Fall eines einzigen Punktes auf einer festen Kurve.

XI. Jetzt sind also die (13):

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\quad\text{(l)}$$

Zugleich ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}&=0,\\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}&=0,\end{aligned}\right\}\quad\text{(m)}$$

wenn wir voraussetzen, dass u und w die Zeit t nicht entwickelt enthalten, also die Kurve eine feste sei.

Aus (l) und (m) folgt sofort:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}, \qquad (n)$$

welche Gleichung, in Verbindung mit

$$u=0,\ w=0 \qquad (p)$$

die Grössen x, y, z als Funktionen von t bestimmt.

Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{D_1}{k_1}&=(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\frac{\partial w}{\partial y}-(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\frac{\partial w}{\partial x},\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{D_2}{k_2}&=-(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\frac{\partial u}{\partial y}+(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

woraus D_1, D_2 folgen. Die letzte (l) würde liefern

$$(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

welche Gleichung wegen (m) und (n) identisch erfüllt ist.

Den Druck auf die Kurve kann man aus D_1 und D_2 bestimmen, oder aber auch, wie aus (l) sofort hervorgeht, beachten dass dessen Seitenkräfte

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}-Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}-Z \qquad (r)$$

sind, wodurch er sich vollkommen bestimmen lässt.

Die aus X, Y, Z Resultirende ist die einzige wirksame Kraft. Wir zerlegen dieselbe in zwei, von denen die eine nach der Tangente an die Kurve gerichtet, die andere auf dieser Tangente senkrecht stehen soll. Die erstere ist

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}, \qquad (s)$$

wenn s der Bogen der Kurve; diess ist aber nach (n)

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{ds}=\tfrac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}\frac{dt}{ds},$$

wenn v die Geschwindigkeit. Da aber

$$v=\frac{ds}{dt},\ v\frac{dt}{ds}=1,$$

so ist also jene Seitenkraft

$$=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (t)$$

Dabei war in (s) die Tangente nach der Richtung des wachsenden Bogens gezogen, so dass wenn jener Ausdruck positiv ausfällt, die Seitenkraft den Punkt nach der Richtung des wachsenden Bogens treibt. Diesen Bogen nehmen wir als mit der

Zeit wachsend an, so dass v positiv ist; fällt dann (t) positiv aus, so treibt die Seitenkraft den Punkt nach der Richtung des mit der Zeit wachsenden Bogens

Was die zweite Seitenkraft betrifft, so sei sie $= R$ und die Richtung derselben durch die Winkel α, β, γ bestimmt. Alsdann ist

$$X = m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + R\cos\alpha,\ Y = m\frac{dv}{dt}\frac{dy}{ds} + R\cos\beta,\ Z = m\frac{dv}{dt}\frac{dz}{ds} + R\cos\gamma,$$

woraus R sich der Grösse und Richtung nach vollkommen bestimmen lässt. *

Man hat

$$R\cos\alpha = X - m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds},\ R\cos\beta = Y - m\frac{dv}{dt}\frac{dy}{ds},$$

$$R\cos\gamma = Z - m\frac{dv}{dt}\frac{dz}{ds}. \tag{u}$$

Die Seitenkräfte des Zwanges auf den Punkt sind die (r); also sind die des Druckes auf die Kurve:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wegen (u) ist aber

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\alpha + m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} - m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\alpha + m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$= R\cos\alpha + m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dt}{ds} = R\cos\alpha - m\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dt}{ds}$$

$$= R\cos\alpha - mv^2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = R\cos\alpha - mv^2\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = R\cos\alpha - mv^2\frac{d^2x}{ds^2},$$

und eben so

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = R\cos\beta - mv^2\frac{d^2y}{ds^2},\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = R\cos\gamma - mv^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche der Halbmesser erster Krümmung ϱ mit den Koordinatenaxen macht, wobei die Richtung von ϱ geht vom Krümmungsmittelpunkt gegen den Kurvenpunkt, durch α', β', γ', so ist bekanntlich

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\cos\alpha'}{\varrho},\ \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\cos\beta'}{\varrho},\ \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\cos\gamma'}{\varrho},$$

wo ϱ immer positiv gerechnet ist. Demnach sind die Seitenkräfte des Gesammtdrucks auf die Kurve

$$R\cos\alpha + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\alpha',\ R\cos\beta + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\beta',\ R\cos\gamma + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\gamma'.\ *$$

---

* Dass die Resultirende von X, Y, Z, die Kraft R und die Kraft $m\frac{dv}{dt}$ in derselben Ebene liegen, und dass die letzten zwei Kräfte auf einander senkrecht stehen, ergibt sich aus diesen Gleichungen unmittelbar.

Daraus folgt, dass dieser Druck die Resultirende ist aus R (der Seitenkraft der wirksamen Kraft, zerlegt senkrecht zur Kurve, wenn die andere Seitenkraft nach der Richtung der Tangente genommen ist) und einer Kraft $\frac{m v^2}{\varrho}$, gerichtet vom Krümmungsmittelpunkt gegen die Kurve (also auf der hohlen Seite gegen die Kurve drückend). Letztere ist die so genannte Zentrifugalkraft. *

§. 2.

Bewegung des Schwerpunkts des Systems.

I. Die Gleichungen (13) sind der Anzahl nach 3n (r = 1, 2, ... n); werden dieselben addirt und heisst man die Summen der zweiten Seiten λ, μ, ν, so hat man

$$\sum_1^n{}_r m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = \lambda, \quad \sum_1^n{}_r m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = \mu, \quad \sum_1^n{}_r m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = \nu. \qquad (14)$$

Die Kräfte λ, μ, ν sind die Seitenkräfte einer Kraft, die man erhalten würde, wenn man die sämmtlichen Kräfte des Systems nach ihrer Stärke und Richtung in denselben Punkt verlegte und zusammensetzte. Demnach fallen in den (14) diejenigen Kräfte weg, die zu je zwei gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, also alle innern Kräfte (§. 1, II).

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems zur Zeit t, so ist

$$\Sigma m_r x_r = \xi M, \quad \Sigma m_r y_r = \eta M, \quad \Sigma m_r z_r = \zeta M,$$

wo M die Masse des Systems, d. h. die Grösse Σm_r ist. Demnach sind die (14):

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \lambda, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mu, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \nu. \qquad (14')$$

Hieraus ergibt sich, dass der Schwerpunkt des Systems sich so bewegt, als wenn die sämmtlichen Kräfte, nach Stärke und Richtung, an ihm angebracht, und ebenfalls alle Massenpunkte des Systems in ihm vereinigt wären.

Dabei kann man also von den innern Kräften ganz absehen. Drucke auf Flächen, in so ferne letztere nicht zum Systeme gehören, fallen aber nicht weg. Eben so verhält es sich mit der Reibung.

II. Kommen in dem Systeme ausser den äussern Kräften keine andern vor als solche die sich zu je zwei aufheben (innere Wirkungen, Spannungen, aber keine Drucke auf Flächen, keine Reibung u. s. w.), so kommen in (14′) nur die äussern Kräfte vor.

---

* Im Zustand der Ruhe, unter dem Einfluss der wirksamen Kraft, wäre R der Druck, wo dann allerdings die (t) Null sein muss. Die Zentrifugalkraft entsteht also bei der Bewegung. Doch ist diese Art der Erklärung nicht geeignet, das Wesen der Sache klar zu machen.

Kann man dann λ, μ, ν finden, ohne die Bewegung jedes einzelnen Punktes zu kennen, so kann man auch die Bewegung des Schwerpunkts unabhängig ermitteln.

Letzteres ist selbstverständlich nicht der Fall, wenn gezwungene Bewegungen in dem Systeme vorkommen, da dann die Drucke nicht bekannt sein können. Der oben ausgesprochene Satz wird also nur bei ganz freien Systemen von Nutzen sein. Richtig ist er freilich immer.

Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

III. Sind λ, μ, ν Null, was der Fall ist wenn nur innere Kräfte wirksam sind, aber auch, wenn die äussern — in einen Punkt verlegt — sich aufheben, so folgt aus (14′):

$$\xi = a_1 + b_1 t, \quad \eta = a_2 + b_2 t, \quad \zeta = a_3 + b_3 t. \tag{15}$$

In diesem Falle bewegt sich also der Schwerpunkt in gerader Linie und gleichförmig; oder auch gar nicht, wenn er anfänglich in Ruhe war und keine Geschwindigkeit erhielt.

Ist also ein System in Ruhe und es werden in ihm bloss innere Kräfte rege, vermöge welcher die einzelnen Punkte sich zu bewegen anfangen, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe. Hat dagegen das System eine Bewegung und es hören plötzlich alle äussern Kräfte auf, auf dasselbe zu wirken, so dass bloss noch innere Kräfte thätig sind, so wird von da an der Schwerpunkt sich in gerader Linie bewegen und zwar nach der Tangente an die Kurve, die er vorher beschrieben und mit der Geschwindigkeit, die er im fraglichen Augenblicke besass.

Sind bei einem freien Systeme alle äussern Kräfte verschwunden, d. h. λ, μ, ν Null, so werden die Konstanten in (15) aus den Anfangswerthen von

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

sich ermitteln lassen. Nun sind die Anfangswerthe von

$$\xi, \eta, \zeta \text{ gleich denen von } \frac{1}{M}\Sigma m_r x_r, \ \frac{1}{M}\Sigma m_r y_r, \ \frac{1}{M}\Sigma m_r z_r,$$

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \text{ gleich denen von } \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dx_r}{dt}, \ \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dy_r}{dt}, \ \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dz_r}{dt}.$$

Demnach hat man, wenn wir diese Anfangswerthe durch Anhängen des Zeigers 0 bezeichnen:

$$\xi = \xi_0 + t\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \quad \eta = \eta_0 + t\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0, \quad \zeta = \zeta_0 + t\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0. \tag{15′}$$

Hieraus ergibt sich, dass auch bei der alleinigen Wirkung innerer Kräfte der Schwerpunkt nur dann in Ruhe bleibt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten den Gleichungen

$$\Sigma m_r \frac{dx_r}{dt} = 0, \quad \Sigma m_r \frac{dy_r}{dt} = 0, \quad \Sigma m_r \frac{dz_r}{dt} = 0 \tag{a}$$

entsprechen. Diess Alles gilt aber nur von einem ganz freien Systeme, da sonst die λ, μ, ν nicht Null sind.

Wenn wir also oben sagten, es bleibe der Schwerpunkt in Ruhe, so ist diess so zu verstehen, dass den einzelnen Punkten entweder keine Anfangsgeschwindigkeiten beigelegt werden, oder doch nur solche, die den (a) genügen. Bei einem freien System, das innere Schwingungen macht, ohne sich fortzubewegen, muss hiernach dieser Fall eintreten, sonst wird es sich nothwendig bewegen. — Diess Alles liegt aber auch in dem oben allgemein ausgesprochenen Satze von der Weiterbewegung des Schwerpunkts, wenn die äussern Kräfte unthätig werden.

IV. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts zur Zeit t ist gegeben durch die Gleichungen

$$M\frac{d\xi}{dt} = \Sigma m_r \frac{dx_r}{dt}, \quad M\frac{d\eta}{dt} = \Sigma m_r \frac{dy_r}{dt}, \quad M\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma m_r \frac{dz_r}{dt}. \qquad \text{(b)}$$

Ist v_r die Geschwindigkeit von m_r, so nennt man zuweilen $m_r v_r$ die Bewegungsgrösse von m_r. Würde man diese wie eine Kraft behandeln können, so wären die zweiten Seiten in (b) die Seitenkräfte derselben. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunkts gleich ist der Resultirenden aller Bewegungsgrössen des Systems, dieselben in ihn verlegt, dividirt durch die Masse. — Doch legen wir diesem Satze keine besondere Bedeutung bei.

Besondere Fälle.

V. Besteht ein System, auf das nur innere Kräfte wirken, aus zwei Theilen, von denen der eine eine fortschreitende Bewegung nach einer Seite hin annimmt, in Folge der Wirkung der innern Kräfte (ohne Anfangsgeschwindigkeiten nach der Bemerkung zu III), so muss der andere Theil sich nach der entgegengesetzten Seite hin bewegen, damit der Schwerpunkt in Ruhe bleibe.

So beim Abfeuern eines Geschützes bewegt sich das Geschütz in einer Richtung, welche der Richtung der bewegten Kugel entgegengesetzt ist. Diess gilt natürlich nur so lange, als Geschütz und Kugel ein System bilden. Hat die Kugel das Geschütz verlassen, so wirken auf beide besondere Kräfte ein, und es bewegen dieselben sich nach besondern Gesetzen; ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt, wenn man von demselben sprechen will, bleibt also nicht in Ruhe. Immerhin freilich würde der allgemeine Satz in I von ihm gelten; doch ist es sicher von keinem Werthe, dessen Bewegung zu untersuchen.

Wird ein Schiff im Wasser durch Ruder bewegt und man betrachtet Schiff und Wasser als ein System, so bleibt, da hier nur innere Kräfte in Thätigkeit sind, der gemeinschaftliche Schwerpunkt in Ruhe; wird aber das Schiff als ein für sich bestehendes System behandelt, so ist der Druck des Wassers gegen das Ruder eine äussere Kraft, und der Schwerpunkt des Schiffes bewegt sich nach dem in I angeführten Satze.

§. 3.

Prinzip der Flächen.

I. Aus den Gleichungen (1) zieht man wie in §. 2:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(x_r Y_r-y_r X_r),\\
\Sigma m_r\left(z_r\frac{d^2x_r}{dt^2}-x_r\frac{d^2z_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(z_r X_r-x_r Z_r),\\
\Sigma m_r\left(y_r\frac{d^2z_r}{dt^2}-z_r\frac{d^2y_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(y_r Z_r-z_r Y_r),
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

worin natürlich X_r, Y_r, Z_r die Seitenkräfte der Resultirenden aller auf m_r wirkenden Kräfte bedeuten, und die Summirung sich auf alle Punkte des Systems erstreckt.

In den zweiten Seiten der (16) fallen nun alle Kräfte weg, die zu je zwei gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Denn greifen in den Punkten m_r, m_s die zwei Kräfte P an, so ist der davon in der Summe

$$\Sigma(x_r Y_r - y_r X_r)$$

herrührende Theil, wenn ϱ die Entfernung:

$$x_r P\frac{y_s-y_r}{\varrho}-y_r P\frac{x_s-x_r}{\varrho}+x_s P\frac{y_r-y_s}{\varrho}-y_s P\frac{x_r-x_s}{\varrho}=0.$$

Aber es fallen auch diejenigen Kräfte für sich aus, für die

$$x_r Y_r = y_r X_r,\ \ z_r X_r = x_r Z_r,\ \ y_r Z_r = z_r Y_r,$$

d. h.

$$X_r : Y_r : Z_r = x_r : y_r : z_r.$$

Diess fordert, dass die Kraft deren Seitenkräfte X_r, Y_r, Z_r sind, nach dem Anfangspunkt der Koordinaten gerichtet ist.

Demnach sind in (16) nicht zu beachten: alle innern Kräfte (zu je zwei gleich und entgegengesetzt gerichtet), so wie diejenigen, deren Richtung durch den Koordinatenanfang geht.

Geht die Richtung der vorhin benannten Kraft bloss durch die x Axe, so ist auch bloss

$$y_r Z_r = z_r Y_r$$

u. s. w.

II. Die (16) lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)&=\Sigma(x_r Y_r-y_r X_r),\\
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(z_r\frac{dx_r}{dt}-x_r\frac{dz_r}{dt}\right)&=\Sigma(z_r X_r-x_r Z_r),\\
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(y_r\frac{dz_r}{dt}-z_r\frac{dy_r}{dt}\right)&=\Sigma(y_r Z_r-z_r Y_r).
\end{aligned}\right\}\quad(16')$$

Hieraus folgt sofort:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1,\\ \Sigma m_r\left(z_r\frac{dx_r}{dt}-x_r\frac{dz_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(z_rX_r-x_rZ_r)\,dt+C_2,\\ \Sigma m_r\left(y_r\frac{dz_r}{dt}-z_r\frac{dy_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(y_rZ_r-z_rY_r)\,dt+C_3,\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

wenn C_1, C_2, C_3 Konstanten sind. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass die zweiten Seiten in (16′) stetige Funktionen von t seien und als solche auch ausgedrückt werden, wenn man die Integration ausführen will.

Wir wollen nun vom Anfangspunkt der Koordinaten auf den Punkt m_r (dessen Koordinaten zur Zeit t sind x_r, y_r, z_r) einen Fahrstrahl gezogen denken. Denselben wollen wir auf die Ebene der xy projiziren und R_r dessen immer positive Projektion nennen; ω_r sei der Winkel, den diese Projektion mit der xAxe macht, wobei derselbe von der (positiven) xAxe gegen die (positive) y Axe gezählt ist. Alsdann hat man

$$x_r=R_r\cos\omega_r,\quad y_r=R_r\sin\omega_r,\quad x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}=R_r^2\frac{d\omega_r}{dt},$$

und es fällt hiernach diese Grösse positiv aus, wenn ω_r wächst mit t, negativ wenn ω_r abnimmt mit wachsendem t. Demnach ist die erste (17)

$$\Sigma m_rR_r^2\frac{d\omega_r}{dt}=\int\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1,$$

$$\Sigma m_r\int R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}dt=\int\!\!\int\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt^2+C_1t+E_1.$$

Die Projektion R_r bewegt sich auf der Ebene der xy und beschreibt dort eine Fläche, deren Differentialquotient $\frac{1}{2}R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}$ ist. Diess ist übrigens, wenn wir die Fläche immer als positiv betrachten, nur richtig wenn $\frac{d\omega_r}{dt}>0$; s e h e n w i r a b e r d i e b e s c h r i e b e n e F l ä c h e a l s p o s i t i v o d e r n e g a t i v a n, j e n a c h d e m R_r r e c h t l ä u f i g (im Sinne wachsender ω_r) o d e r r ü c k l ä u f i g (im Sinne y gegen x) i s t, so stellt

$$\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}dt$$

den von der Zeit α bis zur Zeit β ($>\alpha$) von der Projektion R_r beschriebenen Flächenraum vor, und derselbe ist die a l g e b r a i s c h e Summe aller beschriebenen Flächenelemente. (Dabei ist durchaus nicht nöthig, dass wenn etwa ω_r mehrere Male denselben Werth erhalten sollte, auch R_r jeweils denselben Werth annehme; R_r und ω_r sind als Funktionen von t gedacht).

Beginnt man mit der Zeit τ (die ganz wohl 0 sein kann), so heisst die erste (17)

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)=\int_\tau^t\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1,$$

wo C_1 der Werth der ersten Seite für $t = \tau$ ist. Daraus dann

$$\Sigma m_r \int_\tau R_r^2 \frac{d\omega_r}{dt} dt = \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r)\, dt + C_1 (t - \tau).$$

Aus dieser Gleichung und den übrigen (17) schliesst man nun den folgenden Satz:

Während der Zeit von τ bis t haben die Projektionen der Fahrstrahlen der n einzelnen Massenpunkte auf die drei Koordinatenebenen gewisse Flächen durchlaufen, deren Elemente positiv sein sollen

auf der Ebene der x y, wenn die Bewegung von x gegen y geht,
" " " " z x, " " " " z " x ",
" " " " y z, " " " " y " z ",

negativ im umgekehrten Falle. Nennt man die von den Projektionen des nach m_r gerichteten Fahrstrahls beschriebenen Flächen F_r (Ebene der x y), G_r (Ebene der z x), H_r (Ebene der y z), so ist

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m_r F_r &= \tfrac{1}{2}\int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r)\, dt + C_1 (t - \tau), \\ \Sigma m_r G_r &= \tfrac{1}{2}\int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (z_r X_r - x_r Z_r)\, dt + C_2 (t - \tau), \\ \Sigma m_r H_r &= \tfrac{1}{2}\int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (y_r Z_r - z_r Y_r)\, dt + C_3 (t - \tau). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Dabei können F_r u. s. w. auch negativ ausfallen.

III. Es ist selbstverständlich, dass die in (18) ausgesprochenen Sätze für jede durch den Koordinatenanfang gehende Ebene gelten, da man jede ja z. B. zur Ebene der x y machen kann.

Doch lassen sich leicht die hieher gehörigen Formeln aufstellen. Seien durch den Anfang die drei Axen der x, y, z wie oben gelegt, durch denselben die neuen Axen der x', y', z' (wo die x' y' Ebene die fragliche weitere Ebene sein soll). Alsdann ist bekanntlich, wenn man mit X', Y', Z' die Seitenkräfte nach den neuen Axen bezeichnet (vergl. §. 8, I):

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, & X' &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, & Y' &= b_1 X + b_2 Y + b_3 Z, \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, & Z' &= c_1 X + c_2 Y + c_3 Z. \end{aligned}$$

Daraus

$$\begin{aligned} x_r' Y_r' - y_r' X_r' &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(x Y - y X) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(z X - x Z) \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(y Z - z Y) \\ &= c_3 (x Y - y X) + c_2 (z X - x Z) + c_1 (y Z - z Y), \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} x_r' \frac{d y_r'}{dt} - y_r' \frac{d x_r'}{dt} &= c_3 \left(x_r \frac{d y_r}{dt} - y_r \frac{d x_r}{dt}\right) + c_2 \left(z_r \frac{d x_r}{dt} - x_r \frac{d z_r}{dt}\right) \\ &\quad + c_1 \left(y_r \frac{d z_r}{dt} - z_r \frac{d y_r}{dt}\right). \end{aligned}$$

Ist F_r' die F_r entsprechende Grösse für die neue Ebene der $x'\,y'$, so folgt aus letzterer Gleichung

$$F_r' = c_3 F_r + c_2 G_r + c_1 H_r.$$

Hiebei sind c_3, c_2, c_1 die Cosinus der Winkel, welche die (positive) Axe der z' mit den (positiven) Axen der z, y, x einschliesst, und es sind die Flächelemente in F_r' positiv, wenn die Drehung x' gegen y' geht. Ueberdiess müssen wir die neuen Axen so gelagert denken, dass wenn man sich in die (positive) z' Axe stellt, die Drehung x' gegen y' in demselben Sinne vor sich geht, wie für den in z Axe gestellten Zuschauer die Drehung x gegen y.

Demnach

$$\Sigma m_r F_r' = c_3 \Sigma m_r F_r + c_2 \Sigma m_r G_r + c_1 \Sigma m_r H_r,$$

$$\Sigma \int_\tau^t dt \int_\tau^t (x_r' Y_r' - y_r X_r')\, dt = c_3 \Sigma \int_\tau^t dt \int_\tau^t (x_r Y_r - y_r X_r)\, dt + \ldots.$$

Da aber allgemein sein muss

$$\Sigma m_r F_r' = \tfrac{1}{2} \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r' Y_r' - y_r' X_r')\, dt + E_1 (t - \tau),$$

so ist hieraus

$$E_1 = c_3 C_1 + c_2 C_2 + c_1 C_3,$$

oder wenn man mit α, β, γ die Winkel bezeichnet, welche die Senkrechte auf die neue Ebene mit den Axen der x, y, z macht; durch F_r' die Fläche, welche die Projektion des nach m_r gerichteten Fahrstrahls auf diese Ebene in der Zeit $t - \tau$ beschrieben hat, so ist

$$\Sigma m_r F_r' = \tfrac{1}{2} \cos\gamma \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r)\, dt + \tfrac{1}{2} \cos\beta \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (z_r X_r - x_r Z_r)\, dt \tag{19}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cos\alpha \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (y_r Z_r - z_r Y_r)\, dt + (C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha)(t - \tau).$$

Dabei sind die beschriebenen Flächenelemente positiv, wenn der projizirte Fahrstrahl, gesehen von Jemanden der sich in die Senkrechte gestellt hat, sich in demselben Sinne bewegt, wie er für den in die Axe der z Gestellten als rechtläufig erklärt wurde.

Unveränderliche Ebene.

IV. Sind die zweiten Seiten der (16') Null, so heisst (19):

$$\Sigma m_r F_r' = (C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha)(t - \tau), \tag{20}$$

und es ist also die Summe erster Seite der Zeit proportional.

Bestimmen wir nun α, β, γ so dass die Grösse

$$C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha$$

ein Maximum ist, so hat man, da noch

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$
$$C_1 + k\cos\gamma = 0,\ C_2 + k\cos\beta = 0,\ C_3 + k\cos\alpha = 0,$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{C_3} = \frac{\cos\beta}{C_2} = \frac{\cos\gamma}{C_1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}},$$

wo jedes der zwei Zeichen gelten kann, jedes aber dieselbe Ebene feststellt. Wählen wir also die durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}},\ \cos\beta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}},\ \cos\gamma = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}} \tag{21}$$

festgestellte Ebene (Senkrechte auf die Ebene), so ist für sie

$$\Sigma m_r F' = (t - \tau)\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2},$$

und für diese Ebene ist diese Summe zu jeder Zeit ein Maximum.

Kennt man für drei auf einander senkrechte, durch den Koordinatenanfang gehende Ebenen die Grössen $\Sigma m_r F_r'$, so kennt man, wenn man diese Ebenen zu Koordinatenebenen nimmt, die C_1, C_2, C_3, also dann auch die in (21) nöthigen Grössen.

Die durch (21) bestimmte Ebene ist zu aller Zeit **unveränderlich** und unbeweglich.

Sind α', β', γ' die Richtungswinkel für eine auf der unveränderlichen Ebene senkrechte Ebene, so ist wegen (21)

$$C_3 \cos\alpha' + C_2 \cos\beta' + C_1 \cos\gamma' = 0.$$

Allein für diese Ebene ist nach (20)

$$\Sigma m_r F_r' = (C_3 \cos\alpha' + C_2 \cos\beta' + C_1 \cos\gamma')(t - \tau),$$

d. h. also es ist für jede solche Ebene

$$\Sigma m_r F_r' = 0.$$

Wählt man also die so eben bestimmte unveränderliche Ebene zur Ebene der xy, so ist in (17)

$$\Sigma m_r\left(x_r \frac{dy_r}{dt} - y_r \frac{dx_r}{dt}\right) = C,\ \Sigma m_r\left(z_r \frac{dx_r}{dt} - x_r \frac{dz_r}{dt}\right) = 0,$$
$$\Sigma m_r\left(y_r \frac{dz_r}{dt} - z_r \frac{dy_r}{dt}\right) = 0, \tag{22}$$

Alles natürlich nur unter der Voraussetzung, dass die zweiten Seiten in (16′) Null seien.

Doch liessen sich diese Sätze leicht verallgemeinern.

Freies System mit einem Punkte, der sich geradlinig und gleichförmig bewegt.

V. Gesetzt es gebe in dem System einen Punkt P, der sich gleichförmig und geradlinig bewegt, so dass also dessen Koordinaten ξ, η, ζ immer den Gleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=0 \tag{a}$$

genügen, gleich viel nun, ob in dem Punkt Masse vorhanden ist oder nicht, so wollen wir setzen

$$x_r=\xi+x_r',\ y_r=\eta+y_r',\ z_r=\zeta+z_r', \tag{b}$$

wo also x_r', y_r', z_r' die Koordinaten von m_r zur Zeit t für ein mit dem ursprünglichen paralleles Koordinatensystem sind, dessen (beweglicher) Anfang durch P geht. Dann ist nach (a):

$$x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}=(\xi+x_r')\frac{d^2y_r'}{dt^2}-(\eta+y_r')\frac{d^2x_r'}{dt^2}=\xi\frac{d^2y_r'}{dt^2}-\eta\frac{d^2x_r'}{dt^2}+x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}$$

$$=\xi\frac{d^2y_r}{dt^2}-\eta\frac{d^2x_r}{dt^2}+x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2},$$

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)=\xi\Sigma m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-\eta\Sigma m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}+\Sigma m_r\left(x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}\right).$$

Ist nun das System völlig frei, also bloss seinen innern Wirkungen unterworfen, so ist nach §. 2, III

$$\Sigma m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}=0,\ \Sigma m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}=0,$$

also

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)=\Sigma m_r\left(x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}\right). \tag{23}$$

Ein Punkt, wie er hier verlangt wird, ist aber nach §. 2, III der Schwerpunkt des Systems, so dass also wenn man ihn als (beweglichen) Anfang wählt, die in IV aufgestellten Sätze noch gelten. Die „unveränderliche“ Ebene geht jetzt beständig durch den Schwerpunkt und bleibt mit sich selbst parallel.

§. 4.

Feste Punkte eines beweglichen Systems.

Wir haben seither gewissermassen stillschweigend den Fall ausgeschlossen, da Punkte des (sonst beweglichen) Systems gewaltsam gezwungen werden, zu aller Zeit ruhig d. h. fest zu bleiben.

Für solche Punkte wäre in (13) die erste Seite Null und man hätte zu den „äussern“ Kräften die äussere Gewalt — den Druck auf den betreffenden Punkt — zu rechnen.

Seien solche gezwungen ruhig bleibende Punkte durch den Zeiger ε bezeichnet, d. h. heisst einer derselben m_ε (wo m_ε seine Masse), so hat man für ihn statt der (13):

$$\left.\begin{array}{l} 0=X_\varepsilon-\Sigma_s P_{\varepsilon,s}\frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial x_\varepsilon}+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial x_\varepsilon}-\varXi_\varepsilon, \\ 0=Y_\varepsilon-\Sigma_s P_{\varepsilon,s}\frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial y_\varepsilon}+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial y_\varepsilon}-H_\varepsilon, \\ 0=Z_\varepsilon-\Sigma_s P_{\varepsilon,s}\frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial z_\varepsilon}+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial z_\varepsilon}-Z_\varepsilon, \end{array}\right\} \quad (24)$$

wo $\varXi_\varepsilon$, H_ε, Z_ε die Seitenkräfte des auf den Punkt ausgeübten Drucks sind. Dabei betrachten wir diese Seitenkräfte als positiv, wenn sie nach der Richtung der negativen Koordinatenaxen wirken.

Diese Gleichungen (24) sind mit den (13) zu verbinden, oder besser gesagt, sie sind in den (13) bereits enthalten, da wenn für alle Punkte die Bewegungsgleichungen in §. 1, IX aufgestellt wurden, die (24) schon von selbst erschienen. Doch mag es nicht unpassend sein, hier noch ganz besonders auf sie aufmerksam gemacht zu haben. Die neu eingeführten (unbekannten) Grössen $\varXi$, H, Z entsprechen den drei Bedingungen, dass x_ε, y_ε, z_ε unveränderlich seien, wie diess nach §. 1, III nothwendig ist. *

Durch Additionen, wie in §. 2 und §. 3 wird man die Grössen $\Sigma\varXi_\varepsilon$, ... finden, wo dann die innern Kräfte des Systems wegfallen; doch behalten wir uns das Nähere für späterhin vor. (Vergl. §. 7, III; §. 8, VIII).

Uebrigens würde man Gleichungen wie (24) auch erhalten, wenn ein Punkt gezwungen würde, sich beständig gleichförmig zu bewegen, da dann für ihn $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ konstant, also die ersten Seiten in (13) Null wären.

§. 5.

Umformung der allgemeinen Gleichungen.

I. In den allgemeinen Gleichungen (13) wollen wir für jetzt unter X_r, Y_r, Z_r die äussern und die durch gegenseitige Einwirkung entstandenen Kräfte verstehen, so dass dieselben bloss heissen:

$$\left.\begin{array}{l} m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}=X_r+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \quad m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}=Y_r+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \\ m_r\frac{d^2z_r}{dt^2}=Z_r+\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \end{array}\right\} \quad (25)$$

wo das Summirungszeichen Σ_e sich ganz wohl auf alle Bedingungsgleichungen

$$u_1=0,\ u_2=0,\ \ldots\ldots,\ u_p=0 \qquad (26)$$

beziehen kann, da wenn z. B. x_r in einer derselben nicht vorkommt, die Grösse

* Die $\varXi$, H, Z sind in Wahrheit drei Unbekannte, denn man kennt weder die Stärke, noch die Richtung des auf m_ε ausgeübten Druckes, was drei Unbekannten entspricht. Bei den D in §. 1, V verhält sich die Sache anders, da man dort die Richtung kennt.

$\frac{\partial u}{\partial x_r}$ von selbst Null ist. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei p, wo natürlich $p < 3n$ sein muss. Daraus folgt sofort, dass nur $3n - p = k$ wirklich zu bestimmende Koordinaten übrig bleiben, dass also überhaupt k Grössen zu bestimmen sind.

Man kann sonach mittelst der (26) p der Koordinaten durch die k übrigen (und das etwa auch vorkommende t) ausdrücken, in die (25) einsetzen und wird dann die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der k Koordinaten und der p Werthe S erhalten. Oder man kann überhaupt k neue Grössen einführen, durch welche die 3n Koordinaten sich derart ausdrücken lassen, dass die (26) sämmtlich identisch erfüllt sind. Die Bestimmung dieser k Grössen geschieht dann, wie so eben gezeigt.

Hat man überhaupt bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems erkannt, dass thatsächlich nur k Grössen ermittelt werden müssen, damit die Koordinaten aller Punkte (zur Zeit t) bekannt seien, und dass eine kleinere Zahl nicht hinreichen würde; weiss man überdiess, wie die Koordinaten durch diese k Grössen sich ausdrücken lassen, so ist ganz selbstverständlich, dass die Bedingungsgleichungen (26) erfüllt sind, da ja eben der Ausdruck der 3n Koordinaten durch die k Grössen nur dann richtig ist, wenn jene in der Natur der Aufgabe begründeten Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Allgemeine Auflösung.

II. Es kann nun aber sein, dass man es für die Rechnung nicht bequem findet, gerade nur die nöthigen k Grössen einzuführen, vielmehr deren h erhalten wollte, wo h natürlich grösser als k sein muss. Diesen Fall, als den allgemeinern, wollen wir durchführen. Der besondere oben betrachtete ergibt sich daraus, wenn man $h = k$ setzt.

Statt der 3n Koordinaten x_r, y_r, z_r führe man also die h neuen Veränderlichen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_h, \; h \overline{\overline{>}} 3n - p,$$

ein, mittelst der alle 3n so ausgedrückt werden, dass einige der Bedingungsgleichungen (26) identisch erfüllt sind (der Zahl nach $3n - h$).

Die so identisch erfüllten, also nicht weiter zu beachtenden Bedingungsgleichungen seien

$$u_1 = 0, \; u_2 = 0, \ldots\ldots u_\varrho = 0, \; (\varrho = 3n - h), \tag{26'}$$

während die nicht erfüllten, also zwischen den ξ noch bestehenden, seien

$$u_{\varrho+1} = 0, \; u_{\varrho+2} = 0, \ldots\ldots, u_p = 0, \tag{26''}$$

wo mithin, wenn $h = k$, $\varrho = p$ ist, also die (26'') gar nicht mehr vorhanden sind. Dadurch erscheinen in den (25) natürlich auch die S als Funktionen der ξ.

Denkt man sich die sämmtlichen Koordinaten durch die ξ ausgedrückt und ihre Werthe in (26′) eingesetzt, so sind also — der Annahme nach — diese Gleichungen rein identisch. Daraus folgt, dass man dieselben nach irgend einer der darin noch vorkommenden Grössen ξ differenziren darf. Man hat also wenn e die Werthe 1 bis ϱ hat:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=0, \tag{a}$$

wo s irgend eine der Zahlen 1 bis h sein kann, so dass die (a) eine Anzahl von ϱ h Gleichungen vorstellt. *

Man multiplizire nun die erste (25) mit $\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}$, die zweite mit $\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}$, die dritte mit $\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}$; setze nach einander $r = 1, 2, \ldots, n$ und addire alle so erhaltenen Gleichungen. Dadurch ergibt sich, wenn das Summenzeichen Σ_r auf $r = 1, 2, \ldots n$, das Σ_e auf $e = 1, 2, \ldots, p$ erstreckt wird:

$$\Sigma_r m_r\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=\Sigma_r\left(X_r\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+Y_r\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+Z_r\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)$$
$$+\Sigma_r\Sigma_e S_e\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right).$$

Da nun letztere Summe auch gleich

$$\Sigma_e S_e \Sigma_r\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right);$$

ferner wegen (a) von $e = 1$ bis $e = \varrho$ die Glieder derselben Null sind; weiter allgemein

$$\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}=\Sigma_r\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right),$$

so ist dieselbe

$$\sum_{e=\varrho+1}^{e=p} S_e\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}.$$

Setzt man also noch

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left(X_r\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+Y_r\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+Z_r\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=Q_s, \tag{27}$$

so hat man endlich

$$\sum_{r=1}^{r=n} m_r\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=Q_s+\sum_{e=\varrho+1}^{e=p} S_e\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}, \tag{28}$$

wo $s = 1, 2, \ldots, h$, und noch die (26″) bestehen.

* Kommt in den (26) die Zeit entwickelt vor, so werden die Ausdrücke der Koordinaten durch die ξ dieselbe im Allgemeinen ebenfalls enthalten. Dann wäre eine Differenzirung (partiell) nach t ebenfalls gestattet. Doch bedürfen wir derselben hier nicht.

III. Die erste Seite in (28) lässt sich anders ausdrücken. Setzt man z. A.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

so ist

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{d^2 y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{d^2 z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s} = \frac{d x_r'}{dt}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{d y_r'}{dt}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{d z_r'}{dt}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}. \tag{b}$$

Aber da x_r, y_r, z_r durch die ξ (nebst etwa noch t) ausgedrückt sind, hat man, wenn man eine der drei Grössen durch u bezeichnet:

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\xi_1' + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_h}\xi_h',$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s'} = \frac{\partial u}{\partial \xi_s}, \tag{c}$$

indem u (d. h. x_r, y_r, z_r) kein ξ' enthalten wird. Ferner ist nun

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s} = \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_h}\xi_h'\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial \xi_s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\, \partial \xi_s}\xi_1' + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_h\, \partial \xi_s}\xi_h',$$

was ganz offenbar auf

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_s}\right) \tag{d}$$

hinausläuft. Daraus folgt in (b):

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots = \frac{d x_r'}{dt}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots = \frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots\right) - \left[x_r'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s'} + \ldots\right) - \left[x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + \ldots\right]$$

d. h. gleich

$$\frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s'} + y_r'\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s'} + z_r'\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s'}\right) - \left[x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + y_r'\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s} + z_r'\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi_s'}(x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_s}(x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2).$$

Setzt man also

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n} m_r\left[\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_r}{dt}\right)^2\right] = T, \tag{29}$$

so heisst die (28)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_s} = Q_s + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}, \tag{30}$$

wo das Summenzeichen Σ_e sich auf die (26″) erstreckt und s = 1, 2, ..., h ist.

Die Grösse T ist die lebendige Kraft des Systems zur Zeit t (vergl. §. 1, VIII), und ist durch ξ, ξ' (nebst etwa noch t) ausgedrückt. Diese Grösse kann selbstverständlich immer zum Voraus berechnet werden, sobald man die Ausdrücke der Koordinaten durch die ξ kennt.

Besonderer Fall da $h = k$.

IV. Ist $h = k$ (I), d. h. also hat man nur die durchaus nothwendige Zahl der Grössen ξ eingeführt, und sind mithin alle Bedingungsgleichungen (26) identisch erfüllt, so hat man zur Bestimmung der Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$$

die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_1} = Q_1, \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = Q_k, \tag{31}$$

wo T durch (29), die Q durch (27) gegeben sind.

Diese Gleichungen habe ich in meiner „Integration der partiellen Differentialgleichungen" (Stuttgart, Metzler, 1862) und zwar in §. 10, IV abgeleitet. Die ursprüngliche (wenn auch ganz anders geführte) Ableitung gehört Lagrange zu. (Mécanique analytique, III[ème] Edition, Tome I, pag. 290.)

Wir werden im Folgenden auf diese Formen fortwährend zurückkommen. Sie enthalten nur das durchaus Nothwendige.

Fall der Kräftefunktion (Potential).

V. Gesetzt es gebe eine Funktion V von t und den 3 n Koordinaten, die aber ausser diesen Grössen keine weitern Veränderlichen enthalte (also namentlich nicht die Geschwindigkeiten), so dass

$$X_r = \frac{\partial V}{\partial x_r},\ Y_r = \frac{\partial V}{\partial y_r},\ Z_r = \frac{\partial V}{\partial z_r}, \tag{32}$$

so ist

$$Q_s = \Sigma_r\left(\frac{\partial V}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right) = \frac{\partial V}{\partial \xi_s},\ *$$

und es sind also die (31):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial (T+V)}{\partial \xi_1} = 0, \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial (T+V)}{\partial \xi_k} = 0. \tag{33}$$

Da man — der Annahme nach — x_r, y_r, z_r in ξ (nebst t) kennt, so gibt (29) sofort

$$T \text{ in } \xi, \xi' \left(\text{wo } \xi' = \frac{d\xi}{dt}\right),$$

und es wird T die Grösse t entwickelt enthalten, wenn in den (26) auch t

---

* Enthielte V auch noch

$$\frac{dx_r}{dt}, \frac{dy_r}{dt}, \frac{dz_r}{dt},$$

so würden diese Grössen auch noch mit von ξ_s abhängen und es wäre

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_s} = \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial x_r'}\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r'}\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r'}\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s}\right).$$

entwickelt vorkommt. Enthalten aber die (26) die Zeit nicht entwickelt, so kommt sie auch in T nicht in dieser Form vor. V darf nur von t und den 3n Koordinaten abhängig sein, und wird — wenn diese Koordinaten ersetzt sind — durch t und ξ ausgedrückt erscheinen (ohne ξ').

Die (33) habe ich in der oben erwähnten Schrift näher betrachtet, und führe die dortigen Ergebnisse, welche sich auf die Integration beziehen, hier einfach an, indem ich je auf die betreffenden Stellen jenes Buches hinweise. Für die hier verfolgten Zwecke kann man das Nachstehende füglich übergehen.

Andere Form der (33).

VI. Aus den k Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} = \zeta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} = \zeta_k \tag{34}$$

bestimme man $\xi_1', \ldots, \xi_k'$ durch $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ (nebst $\xi_1, \ldots, \xi_k$, t) und führe diese Werthe in

$$T - \left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k' \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) \tag{35}$$

ein, wodurch diese Grösse sich in U verwandle (abhängig von ζ, ξ, t). Man setze nun

$$\varphi = -(U + V), \tag{36}$$

wo also φ nur $\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \xi_1, \ldots, \xi_k$, t enthält, so wird das System (33) ersetzt durch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_2}, \ldots\ldots, \frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k}; \\ &\frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{d\zeta_k}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Diese Umformung findet sich in §. 10, III der „Integration der partiellen Differentialgleichungen".

Die (37) haben die kanonische Form, wie sie Jacobi und Hamilton in die analytische Mechanik eingeführt.

Uebrigens kann man die (31) ebenfalls unter eine Form bringen, welche der (37) entspricht.

Benützt man wieder die (34) und hat U denselben Werth wie oben, so ist nach §. 10, III des angeführten Buches

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1} = \frac{\partial U}{\partial \xi_s}, \quad \frac{d\xi_s}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_s}.$$

Demnach sind die (31), wenn man (34) beachtet:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \ldots\ldots, \frac{d\xi_k}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_k}, \\ &\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + Q_1, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + Q_2, \ldots, \frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} + Q_k, \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

wo natürlich in U und Q die Grössen ξ' durch ζ (und ξ, t) ersetzt sind.

Ist $Q_s = \frac{\partial V}{\partial \xi_s}$ und man setzt $U = -\varphi - V$, so erhält man unmittelbar die (37). (Für den später betrachteten Fall, da T kein t enthält, ist $U = -T$).

Wir bemerken hiebei gelegentlich, dass wenn die Aufgabe, die ξ als Funktionen der Zeit t zu finden, vollständig erledigt ist, wo natürlich also auch die x, y, z als solche Funktionen bekannt sind, die (13) die Werthe der S_e liefern werden, also die Drucke, Spannungen u. s. w. (§. 1, VI). Doch wäre dabei der Ausdruck der P als bekannt vorausgesetzt.

Integration der (37).

VII. **Es enthalte φ in (37) die Zeit t entwickelt.** Alsdann setze man an die Stelle von $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k}$$

und sei Φ die so aus φ entstehende Grösse. Hierauf bilde man die partielle Differentialgleichung

$$\Phi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \tag{38}$$

und sei

$$\zeta = f \tag{38'}$$

eine Auflösung derselben, wo f eine Funktion von $\xi_1, \ldots, \xi_k$, t mit den k willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ist, von denen jedoch keine bloss addirt wird, welche Funktion also — an die Stelle von ζ gesetzt — der (38) identisch Genüge leisten muss. Alsdann sind die Integralgleichungen von (37):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \zeta_1, \; \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \zeta_2, \ldots\ldots, \; \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \zeta_k; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \; \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots\ldots, \; \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \end{array}\right\} \tag{39}$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_k$ weitere k willkürliche Konstanten. Der Beweis dieser Behauptung ist in §. 9, V des angeführten Buches enthalten.

Mit Berücksichtigung der (34) sind hiernach die Integralgleichungen der (33):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1'}, \; \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \frac{\partial T}{\partial \xi_2'}, \ldots\ldots, \; \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \; \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots\ldots\ldots, \; \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \end{array}\right\} \tag{39'}$$

von denen die letzten k für sich die Aufgabe lösen, die andern dann zur Kontrole und etwaigen Ermittlung der willkürlichen Konstanten dienen.

VIII. **Enthält φ die Zeit t nicht entwickelt,** so bilde man die partielle Differentialgleichung

$$\Phi + a = 0, \tag{40}$$

wo a eine willkürliche Konstante, und sei wieder

$$\zeta = f \tag{38'}$$

eine Auflösung derselben, wo f eine Funktion von $\xi_1, \ldots, \xi_k$ mit den $k-1$ willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ (keine bloss addirt) ist. Alsdann sind die Integralgleichungen von (37):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \zeta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \xi_{k-1}} = \zeta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \zeta_k; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + t = \beta_k, \end{array}\right\} \tag{41}$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_k$ abermals k willkürliche Konstanten. Der Beweis ist in §. 9, VI. des angeführten Buches enthalten.

Die Integralgleichungen von (33) sind also

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1'}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \xi_{k-1}} = \frac{\partial T}{\partial \xi'_{k-1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + t = \beta_k. \end{array}\right\} \tag{41'}$$

Fall, da T die Zeit nicht entwickelt enthält.

IX. In diesem Falle ist T nothwendig eine homogene Funktion der ξ', da

$$\frac{d x_r}{d t} = \frac{\partial x_r}{\partial \xi_1} \xi_1' + \ldots + \frac{\partial x_r}{\partial \xi_k} \xi_k',$$

u. s. w.

Demnach ist (da T homogen des zweiten Grades)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} \xi_1' + \ldots + \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} \xi_k' = 2 T,$$

und also U der Werth von $-T$, wenn man darin die ξ' nach (34) ersetzt. Desshalb ist auch $\varphi = T - V$, wenn man hierin eben so verfährt.

Schlussbemerkung.

X. In den X, Y, Z, wie sie in (27) auftreten, sind die innern Kräfte ebenfalls enthalten, wie diess bereits zu den (25) bemerkt wurde. Wählen wir für $P_{r,s}$ den Ausdruck (7') des §. 1, so ist das auf den Punkt m_r bezügliche Glied von V, das die innern Kräfte liefert, offenbar

$$- m_r \Sigma_s m_s \int f(\varrho_{r,s}) \partial \varrho_{r,s},$$

da dieses nach x_r differenzirt die Grösse

$$- m_r \Sigma m_s f(\varrho_{r,s}) \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r}$$

liefert. Dabei ist das Summenzeichen Σ_s auf alle Punkte des Systems zu erstrecken. Doch ist der Theil von V, der alle innern Kräfte liefert, nicht

$$-\Sigma m_r \Sigma m_s \int f(\varrho_{r,s})\,\partial\varrho_{r,s},$$

sondern nur

$$-\frac{1}{2}\Sigma m_r \Sigma m_s \int f(\varrho_{r,s})\,\partial\varrho_{r,s},$$

da sonst jedes einzelne Glied zwei mal vorkäme.

§. 6.

Trägheitsmomente bei starren Körpern.

I. Wir nennen ein System materieller Punkte einen **starren Körper**, wenn die sämmtlichen Punkte desselben in unveränderlichen Abständen von einander bleiben müssen. Ein solcher Körper wird also nur Bewegungen haben können, die allen Punkten gemeinschaftlich sind.

Durch einen Punkt, den wir als mit dem starren Körper fest verbunden denken (wenn er auch nicht gerade ein Massenpunkt des Körpers sein muss), legen wir drei rechtwinklige Koordinatenaxen, die ebenfalls mit dem Körper unveränderlich verbunden sind. Die Koordinaten des Punktes m_r sind x_r, y_r, z_r, welche Grössen natürlich von der Zeit nicht abhängen. Die drei Grössen

$$\Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2),\quad \Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2),\quad \Sigma m_r (x_r^2 + y_r^2), \tag{42}$$

wo das Summirungszeichen sich auf alle Massenpunkte des Körpers erstreckt, bezeichnen wir durch

$$A,\ B,\ C, \tag{42'}$$

und heissen sie die **Trägheitsmomente** des starren Körpers in Bezug auf die Axen der x, y, z. Dabei ist $y_r^2 + z_r^2$ das Quadrat des Abstandes des Punktes m_r von der x Axe u. s. w.

Ziehen wir überhaupt durch den Koordinatenanfang eine beliebige Gerade, und ist R_r der Abstand des Punktes m_r von ihr (gemessen durch die von m_r auf die Gerade gefällte Senkrechte), so stellt

$$\Sigma m_r R_r^2 \tag{a}$$

das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Gerade vor.

Macht diese Gerade mit den Axen die Winkel α, β γ (dieselben für die eine ihrer zwei entgegengesetzten Richtungen gewählt), so ist

$$\pm(x_r \cos\alpha + y_r \cos\beta + z_r \cos\gamma)$$

die Länge der Projektion des nach m_r gerichteten Fahrstrahls auf die Gerade, und folglich

$$R_r^2 = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 - (x_r \cos\alpha + y_r \cos\beta + z_r \cos\gamma)^2,$$

so dass

$$\Sigma m_r R_r^2 = \sin^2\alpha\, \Sigma m_r x_r^2 + \sin^2\beta\, \Sigma m_r^2 y_r + \sin^2\gamma\, \Sigma m_r z_r^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\, \Sigma m_r x_r y_r$$
$$- 2\cos\alpha\cos\gamma\, \Sigma m_r x_r z_r - 2\cos\beta\cos\gamma\, \Sigma m_r y_r z_r.$$

Da aber wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,\quad \sin^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma,\quad \sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta,$$

so ist wenn

$$\Sigma m_r x_r y_r = D,\quad \Sigma m_r x_r z_r = E,\quad \Sigma m_r y_r z_r = F: \tag{b}$$

$$\Sigma m_r R_r^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos\gamma$$
$$- 2F\cos\beta\cos\gamma. \tag{c}$$

Zentralellipsoid. Hauptaxen.

II. Wir wollen auf der Geraden, die wir so eben zogen, vom Anfangspunkte aus eine Länge auftragen

$$= \frac{1}{\sqrt{\Sigma m_r R_r^2}} = \varrho$$

(und zwar nach der Richtung hin, nach der α, β, γ gerechnet sind). Alsdann sind die Koordinaten des Endpunkts dieser Länge

$$\varrho\cos\alpha,\quad \varrho\cos\beta,\quad \varrho\cos\gamma$$

und wenn dieselben ξ, η, ζ heissen, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\varrho},\quad \cos\beta = \frac{\eta}{\varrho},\quad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\varrho};\quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Dadurch wird aus (c):

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{A\xi^2}{\varrho^2} + \frac{B\eta^2}{\varrho^2} + \frac{C\zeta^2}{\varrho^2} - \frac{2D\xi\eta}{\varrho^2} - \frac{2E\xi\zeta}{\varrho^2} - \frac{2F\eta\zeta}{\varrho^2},$$

d. h.

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\xi\eta - 2E\xi\zeta - 2F\eta\zeta. \tag{43}$$

Dieser Gleichung genügen mithin die Koordinaten des Endpunkts. Da diess nun richtig bleibt für alle möglichen Geraden, wenn man nur für jede dieselbe Konstruktion macht (d. h. die Länge

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma m_r R_r^2}},$$

die ihr entspricht, auf ihr aufträgt), so liegen also die Endpunkte aller solcher Längen in der durch (43) ausgedrückten Fläche zweiten Grades. Da dieselbe eine Fläche mit Mittelpunkt (der Koordinatenanfang) ist, der Fahrstrahl ϱ aber immer endlich bleibt, so ist sie ein Ellipsoid.

Zieht man in dem Ellipsoide (43) vom Mittelpunkte aus irgend einen Fahrstrahl an die Oberfläche und ist ϱ dessen Länge, so ist hiernach $\frac{1}{\varrho^2}$

das Trägheitsmoment des Körpers für die mit diesem Fahrstrahl zusammenfallende Gerade.* — Das Ellipsoid (43) heisst das Zentralellipsoid.

Das Ellipsoid hat drei auf einander senkrechte Hauptaxen. Wählt man dieselben zu Koordinatenaxen, so fallen in (43) die drei letzten Glieder weg, und die Gleichung des Ellipsoids heisst bloss

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 = 1. \tag{44}$$

Die jetzigen Koordinatenaxen heissen die Hauptaxen für den betreffenden Punkt; die drei Trägheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die diesen Hauptaxen zugehören, werden eben so die Hauptträgheitsmomente genannt.

Wählt man also die drei durch den Koordinatenanfang gehenden Hauptaxen (die immer bestehen) zu Koordinatenaxen, so hat man

$$\Sigma m_r(y_r^2 + z_r^2) = \mathfrak{A},\ \Sigma m_r(x_r^2 + z_r^2) = \mathfrak{B},\ \Sigma m_r(x_r^2 + y_r^2) = \mathfrak{C},$$
$$\Sigma m_r x_r y_r = 0,\ \Sigma m_r x_r z_r = 0,\ \Sigma m_r y_r z_r = 0. \tag{45}$$

Die grösste der drei Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ stellt überhaupt das grösste Trägheitsmoment, die kleinste auch das kleinste des Körpers dar für alle durch den fraglichen Punkt gehenden Geraden.**

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so ist das Zentralellipsoid ein Umdrehungsellipsoid mit der Axe der z als Rotationsaxe. Alsdann ist jede Gerade, die durch den Koordinatenanfang geht und auf der z Axe senkrecht steht, eine Hauptaxe (d. h. eine zweite auf ihr und der z Axe senkrechte Gerade liefert mit den beiden andern ein System von drei Hauptaxen).

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so ist (44) eine Kugel, und jeder Durchmesser ist eine Hauptaxe.

---

* Natürlich ist es gleichgiltig, nach welcher der zwei möglichen Richtungen eine Gerade gezogen ist, wenn es sich nur um das Trägheitsmoment handelt. Wirklich sind auch die zwei entgegengesetzt gerichteten Fahrstrahlen gleich.

** Die Längen der drei Hauptaxen des Ellipsoids sind

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}},\ \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}}},\ \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}}.$$

Die grösste dieser Hauptaxen ist überhaupt der längste Fahrstrahl, die kleinste der kürzeste, wie aus der Theorie des Ellipsoids bekannt ist. Ist also

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{B} > \mathfrak{C},$$

so ist $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$ der kleinste Fahrstrahl; ist ϱ irgend ein anderer, so hat man

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} < \varrho^2,\ \mathfrak{A} > \frac{1}{\varrho^2}.$$

Da $\frac{1}{\varrho^2}$ das dem Fahrstrahl ϱ entsprechende Trägheitsmoment, so ist also hiernach $\mathfrak{A}$ das grösste aller Trägheitsmomente. Ganz eben so ist $\mathfrak{C}$ das kleinste.

Dabei ist zu beachten, dass dem grössten Trägheitsmoment die kleinste Hauptaxe, dem kleinsten Trägheitsmoment die grösste Hauptaxe des Zentralellipsoids zugehört.

III. Sind die anfänglichen Axen so gewählt, dass

$$\Sigma m_r x_r z_r = 0, \ \Sigma m_r x_r y_r = 0, \tag{d}$$

so ist die x Axe eine der Hauptaxen. Denn dann ist die (43)

$$1 = A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 F y z,$$

woraus sofort folgt, dass die x Axe bereits eine der Hauptaxen des Ellipsoids ist. Natürlich würde für

$$\Sigma m_r x_r y_r = 0, \ \Sigma m_r y_r z_r = 0 \tag{e}$$

bereits die y Axe, und für

$$\Sigma m_r x_r z_r = 0, \ \Sigma m_r y_r z_r = 0 \tag{f}$$

bereits die z Axe Hauptaxe sein.

Besondere Gattung symmetrischer Körper.

IV. Angenommen es seien die Massenpunkte eines starren Körpers so gelagert, dass wenn man durch die z Axe irgend eine Ebene senkrecht legt, zu jedem Massenpunkt dieser Ebene, dem die Koordinaten x_r, y_r zugehören, sich drei andere in derselben Ebene angeben lassen, denen die Koordinaten

$$x_r, \ -y_r; \ -x_r, \ y_r; \ -x_r, \ -y_r$$

zugehören und welche dieselbe Masse mit dem ersten haben. Alsdann sind die Grössen

$$\Sigma m_r x_r z_r, \ \Sigma m_r y_r z_r, \ \Sigma m_r x_r y_r$$

offenbar alle Null. Denn für die zwei esten sind die Glieder, welche jedem einzelnen z_r entsprechen, da zu jedem x_r auch ein $-x_r$ gehört, und eben so zu jedem y_r ein $-y_r$ mit demselben m_r, schon für sich Null; in der dritten ist die Summe der $m_r x_r y_r$ für jede durch die z Axe gelegte Ebene Null, weil man immer zu einem x_r, y_r ein x_r, $-y_r$ erhalten kann mit gleichem m_r.

Demnach sind die Koordinatenaxen Hauptaxen.

Einer Anordnung, wie die hier betrachtete, entspricht die äussere Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, überhaupt eines Körpers, dessen Querschnitte Rechtecke sind, deren Mittelpunkt auf der z Axe sich befindet und deren Seiten parallel laufen. Die vier Punkte, von denen die Rede war, bilden ein Rechteck. Ist dasselbe ein Quadrat, so ist noch

$$\Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2) = \Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2),$$

also (44) ein Rotationsellipsoid.

Dasselbe ist der Fall, wenn in derselben Ebene (senkrecht zur z Axe) sich vier andere Punkte finden, deren Massen denen der frühern gleich sind, und die ebenfalls ein Rechteck derselben Art bilden, dessen Seiten aber — gegenüber dem frühern — vertauscht sind. (Der Mittelpunkt des Rechtecks auf der z Axe, die Seiten parallel den x und y Axen, jedoch so dass die der x Axe parallele Seite gleich ist der des frühern Rechtecks, dessen Seite parallel der y Axe war u. s. w.) Einer solchen Anordnung kann der durch Rotation einer Kurve um die z Axe entstandene Körper entsprechen und wird hieher gehören, wenn er gleichartig (homogen) ist.

Ueberhaupt gehören hieher Körper, die aus gleichartigen Ringen bestehen, deren Mittelpunkt sich auf der z Axe befindet und deren Ebene senkrecht auf dieser Axe steht. In allen den betrachteten Fällen liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der z Axe und es ist gleichgiltig, wo auf ihr der Koordinatenanfang genommen wird.

Besteht der Körper aus gleichartigen Kugelschalen, die alle den Koordinatenanfang zum Mittelpunkt haben, so ist offenbar

$$\Sigma m_r x_r y_r = 0, \ \Sigma m_r x_r z_r = 0, \ \Sigma m_r y_r z_r = 0,$$

wie diess schon aus dem Obigen hervorgeht. Zu dem ist noch

$$\Sigma m_r (x_r^2 + y_r^2) = \Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2) = \Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2),$$

also die drei Hauptträgheitselemente gleich. Der Schwerpunkt fällt in den Koordinatenanfang.

Es ist in diesen Fällen die z Axe für alle Punkte, die in ihr liegen, eine Hauptaxe. Man kann sich nun die Frage stellen, ob überhaupt eine Gerade, die für einen Punkt, der in ihr liegt, eine Hauptaxe ist, es auch noch für die übrigen Punkte, durch die sie geht, sein werde, oder wenn diess nicht allgemein der Fall ist, unter welcher Bedingung?

Sei die Gerade z Axe und für einen bestimmten Punkt in ihr Hauptaxe. Wählen wir denselben zum Koordinatenanfang, so ist nach III (f) jedenfalls

$$\Sigma m x z = 0, \ \Sigma m y z = 0.$$

Verlegen wir nun die x und y Axen parallel mit sich selbst in einen Punkt der z Axe, und sind x', y', z' die neuen Koordinaten, so ist

$$z = z' + c, \ x = x', \ y = y'.$$

Sollte nun die z Axe immer noch Hauptaxe sein, so müsste auch

$$\Sigma m x' z' = 0, \ \Sigma m y' z' = 0$$

sein, d. h.

$$\Sigma m x (z - c) = 0, \ \Sigma m y (z - c) = 0,$$

oder wegen obiger Gleichungen:

$$\Sigma m x = 0, \ \Sigma m y = 0.$$

Diese Gleichungen sagen aber aus, dass die z Axe durch den Schwerpunkt gehen muss. Nur dann ist sie also überall Hauptaxe. (Vergl. VI.)

Reduktion der Trägheitsmomente. Hauptaxen durch den Schwerpunkt.

V. Wir wollen künftig die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers für die durch seinen Schwerpunkt gehenden Hauptaxen durch

$$\mathfrak{F}, \ \mathfrak{G}, \ \mathfrak{H} \qquad (46)$$

bezeichnen. Aus diesen wollen wir das Trägheitsmoment für irgend eine Gerade, die durch einen bestimmten Punkt geht, berechnen.

Seien α, β, γ die Winkel, welche diese Gerade mit den Axen der drei Momente (46) macht; ferner sei ϱ der Abstand der Geraden vom Schwerpunkte.

Man wähle in der Geraden einen Punkt P, dessen Koordinaten in Bezug auf die Hauptaxen durch den Schwerpunkt seien ξ, η, ζ (die x Axe gehört zum Trägheitsmoment $\mathfrak{F}$ u. s. w.). Durch P lege man Axen, die mit den eben genannten parallel sind. Sind nun x′, y′, z′ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers für die neuen; x, y, z für die alten Axen, so ist

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta.$$

Sind ferner A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers für die neuen Axen, so ist

$$A = \Sigma m (y'^2 + z'^2) = \Sigma m [(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2] = \Sigma m (y^2 + z^2) - 2\eta \Sigma m y - 2\zeta \Sigma m z$$
$$+ (\eta^2 + \zeta^2) \Sigma m,$$

oder da

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \mathfrak{F}; \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0,$$

weil der frühere Koordinatenanfang Schwerpunkt ist;

$$\Sigma m = M,$$

wenn M die Masse des Körpers: so ist

$$A = \mathfrak{F} + (\eta^2 + \zeta^2) M, \quad B = \mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M, \quad C = \mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2)$$

Ferner ist

$$\Sigma m x' y' = \Sigma m (x - \xi)(y - \eta) = \Sigma m x y - \xi \Sigma m y - \eta \Sigma m x + \xi \eta \Sigma m,$$

d. h. da

$$\Sigma m x y = 0,$$

weil die frühern Axen Hauptaxen sind, so ist

$$\Sigma m x' y' = \xi \eta M, \quad \Sigma m x' z' = \xi \zeta M, \quad \Sigma m y' z' = \eta \zeta M.$$

Das Zentralellipsoid für den Punkt P ist hiernach [aus (43)]:

$$1 = [\mathfrak{F} + (\zeta^2 + \eta^2) M] x'^2 + [\mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M] y'^2 + [\mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2) M] z'^2$$
$$- 2\xi\eta M x' y' - 2\xi\zeta M x' z' - 2\eta\zeta M y' z', \qquad (g)$$

wenn seine Koordinatenaxen die durch P gelegten Axen sind.

Die Gerade, die wir in Betracht genommen, macht mit diesen Axen die Winkel α, β, γ; zieht man sie in dem Ellipsoid (g), so ist die Länge des entsprechenden Fahrstrahls k gegeben durch

$$\frac{1}{k^2} = [\mathfrak{F} + (\zeta^2 + \eta^2) M] \cos^2\alpha + [\mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M] \cos^2\beta + [\mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2) M] \cos^2\gamma$$
$$- 2\xi\eta M \cos\alpha \cos\beta - 2\xi\zeta M \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta\zeta \cos\beta \cos\gamma$$
$$= \mathfrak{F} \cos^2\alpha + \mathfrak{G} \cos^2\beta + \mathfrak{H} \cos^2\gamma + M [\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\eta)^2].$$

Die Grösse

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2$$

ist aber das Quadrat des Abstands des Punktes P von einer durch den Schwerpunkt mit unserer Geraden parallel gezogenen, also auch umgekehrt der Abstand des Schwerpunkts von der Geraden, d. h. ϱ^2; ferner ist (II) $\frac{1}{k^2}$ das gesuchte Trägheitsmoment, so dass wir folgenden Satz erhalten:

Sind $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Trägheitsmomente für die durch den Schwerpunkt eines starren Körpers gehenden Hauptaxen, so ist das Trägheitsmoment für irgend eine Gerade, deren Richtung mit diesen Axen die Winkel α, β, γ macht, und deren Abstand vom Schwerpunkte ϱ ist, gleich

$$\mathfrak{F} \cos^2 \alpha + \mathfrak{G} \cos^2 \beta + \mathfrak{H} \cos^2 \gamma + M \varrho^2,$$

wo M die Masse des Körpers.

Fälle, da die Hauptaxen für einen Punkt parallel sind mit den durch den Schwerpunkt gehenden.

VI. Es ergibt sich aus der Formel (g) ganz unmittelbar, dass die durch den Punkt P gehenden Hauptaxen im Allgemeinen nicht parallel sind mit den durch den Schwerpunkt gehenden. Denn sonst müsste die (g) nur die Quadrate von x', y', z' enthalten, was aber so lange nicht der Fall, als die Grössen ξ, η, ζ von Null verschieden sind.

Eben hieraus leiten sich aber auch die Fälle ab, in denen die Hauptaxen durch P parallel sind mit denen durch den Schwerpunkt, die wir hier vollständig aufzählen wollen.

1) Ist $\xi = 0$, liegt also der Punkt P in der Ebene der yz (der Axen, denen die Trägheitsmomente $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zugehören), so bleibt in (g) nur das Glied mit $y'\,z'$ stehen. Also ist jetzt die neue x Axe eine Hauptaxe, d. h. die durch P gehende und auf der yz Ebene senkrecht stehende Gerade ist für diesen Punkt eine der Hauptaxen.

2) Ist $\eta = 0$, d. h. liegt der Punkt P in der Fbene der xz ($\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$), so ist die neue y Axe eine Hauptaxe für P, d. h. die durch ihn gehende auf der xz Ebene senkrechte Gerade.

3) Ist $\zeta = 0$, so ist eben so die durch P gehende, auf der xy Ebene senkreckt stehende Gerade eine Hauptaxe für P, welcher Punkt in der xy Ebene liegt.

4) Sind $\xi = 0$, $\eta = 0$, d. h. liegt P in der z Axe, so fallen in (g) alle Produkte weg, und es sind also die Hauptaxen für P mit denen für den Schwerpunkt parallel.

5) Sind $\xi = 0$, $\zeta = 0$, d. h. liegt P in der y Axe, so gilt dasselbe wie in 4.

6) Sind $\eta = 0$, $\zeta = 0$, d. h. liegt P in der x Axe, so hat man ebenfalls dasselbe Ergebniss. (Vergl. Schluss von IV.)

Gleiche Trägheitsmomente.

VII. Wir wollen uns schliesslich die Frage stellen, wann das Ellipsoid (g) eine Kugel werden kann, in welchem Falle dann die sämmtlichen Trägheitsmomente für P gleich werden (II). Alsdann muss

$$\mathfrak{F} + (\zeta^2+\eta^2)M = \mathfrak{G} + (\xi^2+\zeta^2)M = \mathfrak{H} + (\eta^2+\xi^2)M,\quad \xi\eta=0,\quad \xi\zeta=0,\quad \eta\zeta=0$$

sein. Die letzten drei verlangen

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \text{oder}\ \xi=0,\ \zeta=0,\ \text{oder}\ \eta=0,\ \zeta=0,$$

also dass jedenfalls der Punkt auf einer der drei durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen liege — die Fälle 4—6 in VI.

Für den Fall 4 wäre dann $\mathfrak{F}+\zeta^2 M = \mathfrak{G}+\zeta^2 M = \mathfrak{H}$, $(\mathfrak{F}=\mathfrak{G})$;
" " " 5 " " $\mathfrak{F}+\eta^2 M = \mathfrak{G} = \mathfrak{H}+\eta^2 M$, $(\mathfrak{F}=\mathfrak{H})$;
" " " 6 " " $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}+\xi^2 M = \mathfrak{H}+\xi^2 M$, $(\mathfrak{G}=\mathfrak{H})$.

Daraus folgt, dass nothwendig zwei der drei Grössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ einander gleich sein müssen, dass aber auch diese gleichen nothwendig kleiner sein müssen als die dritte. Alsdann liegt der Punkt auf der Axe dieses dritten (ungleichen und grössern Trägheitsmomentes) und zwar in einer Entfernung vom Schwerpunkte gleich der Quadratwurzel aus dem durch die Masse dividirten Unterschiede des ungleichen und grössern Hauptträgheitsmomentes für den Schwerpunkt und des einen der zwei gleichen. Solcher Punkte gibt es folglich nur zwei.

Ist $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}=\mathfrak{H}$, so sind die Trägheitsmomente für den Schwerpunkt gleich; dann ist aber $\xi=\eta=\zeta=0$, d. h. es gibt ausser dem Schwerpunkte keinen andern Punkt des Körpers mehr, der in dieser Lage ist.

§. 7.

Rotation eines starren Körpers um eine feste Axe.

I. Die feste Axe sei die der z. Denken wir uns mit dem starren Körper unveränderlich verbunden zwei Axen der x′, y′, senkrecht auf der z Axe, mit demselben Koordinatenanfang wie die Axen der x, y, z. Sind alsdann x′, y′, z die Koordinaten eines Punktes des Körpers für die mit dem Körper fest verbundenen Axen der x′, y′, z; x, y, z die desselben Punktes für die Axen, welche im Raume feststehen; ist ferner ω der Winkel, den die (bewegliche) x′ Axe mit der (unveränderlichen) x Axe macht, dieser Winkel in dem Drehungssinne x gegen y gezählt: * so hat man immer

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega,\quad y = y'\cos\omega + x'\sin\omega, \tag{a}$$

* D. h. so dass man sich von der (positiven) x Axe gegen die (positive) y Axe durch den Winkel von 90° bewegt. Dabei verstehen wir immer nur die positiven Richtungen, wenn wir kurzweg von der x Axe u. s. w. sprechen.

und da z ohnehin fest ist, so kennt man somit die Lage jedes Punktes, wenn ω bekannt ist. In §. 5, IV ist also $k = 1$, $\xi = \omega$. Dann

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] = \tfrac{1}{2} \Sigma m [(-x' \sin\omega - y' \cos\omega)^2$$

$$+ (-y' \sin\omega + x' \cos\omega)^2] \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2} C \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \; C = \Sigma m (x'^2 + y'^2), \; (§. 6, I); \; T = \tfrac{1}{2} C \omega'^2.$$

$$Q (§. 5, II) = \Sigma \left(X \frac{\partial x}{\partial \omega} + Y \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) = \Sigma (Y x - X y).$$

Also die (31)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \omega} = Q,$$

d. h.

$$C \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \Sigma (x Y - y X). \tag{47}$$

In dieser Gleichung fallen ohnehin alle innern Kräfte weg; dann aber auch alle, die nach der festen Axe gerichtet sind. (§. 3, I).

Sind X, Y als Funktionen der Koordinaten x, y gegeben, so benützt man (a), um aus (47) ω zu erhalten, also die Aufgabe zu lösen.

Dabei ist dann $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t, d. h. wenn die Bewegung während der Zeiteinheit genau dieselbe bleiben würde, wie sie zur Zeit t war, so würde ω um $\frac{d\omega}{dt}$ zunehmen.

Kräftefunktion.

II. Ist (§. 5, V)

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

wo V nur x, y, t enthält, so ist

$$C \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \omega} \tag{47'}$$

die Gleichung der Bewegung.

Nach den Vorschriften in §. 5, VI ist also

$$C \omega' = \zeta_1, \; \omega' = \frac{\zeta_1}{C};$$

$$T - \omega' \frac{\partial T}{\partial \omega'} = \tfrac{1}{2} C \omega'^2 - C \omega'^2 = -\tfrac{1}{2} C \omega'^2 = -\tfrac{1}{2} \frac{\zeta_1^2}{C}; \; \varphi = -V + \tfrac{1}{2} \frac{\zeta_1^2}{C}.$$

Also die (37):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}. * \tag{b}$$

* D. h. $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\zeta_1}{C}$, $\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \omega}$, was unmittelbar wieder zu (47') führt.

Enthält nun V die Zeit t entwickelt (§. 5, VII), so hat man eine Auflösung von

$$-V+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right)^2+\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0 \tag{c}$$

zu suchen, um (wenn man dieselbe mit ζ bezeichnet, wobei eine willkürliche Konstante α eingetreten sein muss) aus

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}=C\omega', \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}=\beta \tag{d}$$

das allgemeine Integral von (47′) zu erhalten.

Ist V frei von t, so hat man (§. 5, VIII)

$$-V+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right)^2+a=0 \tag{e}$$

ohne willkürliche Konstante aufzulösen, und es sind

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}=C\omega', \frac{\partial \zeta}{\partial a}+t=\beta \tag{f}$$

die Integralgleichungen von (47′). Aus (e) folgt aber

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}=\pm\sqrt{2C(V-a)},\ \zeta=\pm\int\sqrt{2C(V-a)}\,\partial\omega, \tag{e'}$$

also sind die (f) d. h.

$$C\omega'=\pm\sqrt{2C(V-a)},\ t\mp C\int\frac{\partial\omega}{\sqrt{2C(V-a)}}=\beta \tag{f'}$$

die Integralgleichungen von (47′), die sich übrigens aus dieser Gleichung unmittelbar ableiten lassen. (Pendelbewegung.)

Druck auf die feste Axe.

III. Nach §. 4 sind in den Punkten, deren Koordinaten $x=0$, $y=0$ sind, Kräfte angebracht zu denken, deren Seitenkräfte Ξ, H, Z sind, und es sind die dortigen (24) für jeden dieser Punkte maassgebend.

Durch die Addition der sämmtlichen (13) und der (24) ergibt sich

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X-\Sigma\Xi,\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y-\Sigma H,\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z-\Sigma Z, \tag{g}$$

da hier jedenfalls alle innern Kräfte wegfallen und die u nicht vorhanden sind (§. 2, I). Das Summenzeichen der ersten Seite und des ersten Gliedes der zweiten bezieht sich auf alle Punkte des Körpers; das des zweiten Gliedes der zweiten Seite auf alle Punkte der Axe.

Da die Kräfte Ξ parallel sind, so ist $\Sigma\Xi$ ihre Resultirende; Aehnliches gilt für ΣH, ΣZ.

Weiter ist aus (a)

$$\frac{dx}{dt} = -y\frac{d\omega}{dt},\quad \frac{dy}{dt} = x\frac{d\omega}{dt};\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - y\frac{d^2\omega}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2\omega}{dt^2};$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Xi &= \Sigma X + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m x + \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m y; \\ \Sigma H &= \Sigma Y + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m y - \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m x; \\ \Sigma Z &= \Sigma Z. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Dabei ist Z die Seitenkraft der auf einen Punkt m wirkenden Kraft nach der z Axe (der festen Rotationsaxe). Die Grösse ΣZ drückt also die Kraft aus, mit der die Axe in ihrer eigenen Richtung verschoben werden will.

Aus den (24) und (13) zieht man wie in §. 3, I:

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx) - \Sigma(\Xi z - Zx),$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Yz - Zy) - \Sigma(Hz - Zy),$$

wo die Summenzeichen wie in (g) zu nehmen sind. Da aber

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

ferner im letzten Summenzeichen nur Punkte vorkommen, für die

$$x = y = 0,$$

so ist:

$$\Sigma\Xi z = \Sigma(Xz - Zx) - \Sigma m z\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\Sigma H z = \Sigma(Yz - Zy) - \Sigma m z\frac{d^2y}{dt^2};$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Xi z &= \Sigma(Xz - Zx) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m x z + \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m y z, \\ \Sigma H z &= \Sigma(Yz - Zy) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m y z - \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m x z. \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

Greift die Resultirende $\Sigma\Xi$ in dem Punkte an, dessen z gleich z_1; die ΣH im Punkte $z = z_2$, so ist

$$z_1\,\Sigma\Xi = \Sigma\Xi z,\quad z_2\,\Sigma H = \Sigma H z, \qquad (k)$$

so dass die (h) und die (i) die vollständige Auflösung der Aufgabe enthalten.

Ist die Rotationsaxe eine der Hauptaxen,

so ist für sie

$$\Sigma m x' z = 0,\quad \Sigma m y' z = 0,$$

woraus wegen (a) unmittelbar folgt:

$$\Sigma m x z = 0, \ \Sigma m y z = 0.$$

Alsdann fällt in (i) ω ganz weg.

Liegt dazu noch der Schwerpunkt in der Rotationsaxe,

so ist

$$\Sigma m x' = 0, \ \Sigma m y' = 0, \text{ d. h. } \Sigma m x = 0, \ \Sigma m y = 0$$

und es ist jetzt der Druck auf die Axe ganz unabhängig von der Bewegung.

§. 8.

Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

I. Den festen Punkt wählen wir zum Koordinatenanfang und legen durch ihn ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das völlig unbeweglich sei. Durch denselben Punkt legen wir ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem, das mit dem Körper unveränderlich verbunden sei, sich also mit demselben bewege. Dabei wollen wir sofort voraussetzen, dass dieses (bewegliche) Koordinatensystem das der drei durch den betreffenden Punkt gehenden Hauptaxen sei (§. 6, II). Wäre mehr als ein System von Hauptaxen möglich, so wollen wir eben ein bestimmtes davon annehmen (§. 6, II, IV).

Die Koordinaten eines Körperpunktes m für die ersten Axen seien x, y z (veränderlich mit der Zeit); die desselben Punktes für die zweiten x', y', z' (unveränderlich). Ist nun die Lage des beweglichen Koordinatensystems in Bezug auf das feststehende zur Zeit t bekannt, so kennt man auch die Lage jedes einzelnen Körperpunkts. Die Grössen ξ in §. 5, IV sind also diejenigen Grössen, die diese Lage feststellen. Dazu gehören bekanntlich drei Winkel φ, ψ, ϑ, mittelst der das zweite System folgendermassen aus dem ersten erhalten wird:

Von der (positiven) x Axe bewege man sich in dem Drehungssinne x gegen y um den Winkel ψ; die denselben schliessende Gerade (Strahl vom Anfangspunkt O aus, also nur halbe Gerade) sei OA, und also die x Axe zweite Seite dieses Winkels. In demselben Drehungssinne liege OB um 90° weiter. Die Ebene AOB (Ebenenausschnitt) drehe man um OA so, das OB sich der festen z Axe nähert, und es betrage diese Drehung den Winkel ϑ (man wolle beachten, dass der Sinn dieser Drehung derselbe ist, als wenn man den Ausschnitt xOy um die x Axe drehen würde im Sinne y gegen z). Die neue Lage von OB sei OB' und OC die Lage der Senkrechten auf AOB', die anfänglich mit der z Axe zusammenfiel. Nun drehe man AOB' um OC im Sinne OA gegen OB' um den Winkel φ. — Die neue Lage von OA ist die x' Axe, die von OB' ist die y' Axe, und OC ist die z' Axe.

Dabei können die Winkel beliebige Werthe haben. Zugleich wolle man

bemerken, dass das neue und das alte Koordinatensystem zur Deckung gebracht werden können, also dass wenn z. B. Jemand in der y Axe steht und lässt die Ebene der z x im Sinne z gegen x sich drehen, diese Drehung ganz in derselben Richtung vor sich geht, als wenn Jemand von der y' Axe aus die Drehung z' gegen x' sieht. Die nachfolgenden Sätze setzen grösstentheils dieses Verhältniss wesentlich voraus, namentlich (48) und (52).

Diess angenommen hat man nun

$$\left.\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\delta) + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\delta) \\ &\qquad + z'\sin\psi\sin\delta, \\ y &= x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\delta) + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\delta) \\ &\qquad + z'(-\cos\psi\sin\delta), \\ z &= x'\sin\varphi\sin\delta + y'\cos\varphi\sin\delta + z'\cos\delta, {}^* \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

was wir häufig kürzer durch

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \; y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \; z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \quad (49)$$

bezeichnen wollen, wo die Werthe von $a_1, \ldots, c_3$ aus (48) sofort entnommen werden können.

Zwischen diesen Grössen gelten nun die nachfolgenden Beziehungen, die entweder unmittelbar, oder mittelst der (48) leicht nachgewiesen werden können.

$$\left.\begin{aligned} &a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \; a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \; a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ &a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \; a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0, \; a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0; \end{aligned}\right\} (50)$$

---

* Die Ableitung dieser wichtigen Beziehungen mag hier angedeutet werden. Wir stützen uns dabei auf folgenden Satz. Hat man ein zweiaxiges System der $\xi\,\eta$ (in einer Ebene) und durch denselben Anfangspunkt eines der $\xi'\eta'$; ist α der Winkel, den die ξ' Axe mit der ξ Axe macht, im Drehungssinne ξ gegen η (überall rechtwinklige Koordinaten), so ist ganz allgemein

$$\xi = \xi'\cos\alpha - \eta'\sin\alpha, \quad \eta = \xi'\sin\alpha + \eta'\cos\alpha, \qquad (\alpha)$$

vorausgesetzt, dass die Drehungsrichtungen $\xi\,\eta$, $\xi'\eta'$ dieselben sind.

Man nehme nun zuerst OA und OB zu neuen Axen der x_1, y_1, und behalte die z Axe als z_1 Axe. Alsdann ist in (α) $\xi = x$, $\eta = y$, $\xi' = x_1$, $\eta' = y$, $\alpha = \psi$, also

$$x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi, \quad y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi_1 \; z = z_1. \qquad (\beta)$$

Nun rechne man OB' und OC als neue Axen der y_2, z_2 und behalte OA als x_2 Axe. In (α) ist $\xi = y_1$, $\eta = z_1$. $\xi' = y_2$, $\eta' = z_2$, $\alpha = \delta$, also

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2\cos\delta - z_2\sin\delta, \quad z_1 = y_2\sin\delta + z_2\cos\delta. \qquad (\gamma)$$

Endlich nehme man die letzte Lage von OA zur x' Axe, die von OB' zur y' Axe und behalte OC als z' Axe. In (α) ist $\xi = x_2$, $\eta = y_2$, $\xi' = x'$, $\eta' = y'$, $\alpha = \varphi$, also

$$x_2 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \quad z_2 = z'. \qquad (\delta)$$

Aus der Verbindung von (β), (γ), (δ) ergeben sich die (48).

Dabei müssen wir nochmals darauf hinweisen, dass diese Formeln nur unter der Voraussetzung gelten, nach der beide Koordinatensysteme vollständig zur Deckung gebracht werden können.

$$\left.\begin{array}{l} a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1,\ b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 = 1,\ c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 = 1, \\ a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = 0,\ a_1\, c_1 + a_2\, c_2 + a_3\, c_3 = 0,\ b_1\, c_1 + b_2\, c_2 + b_3\, c_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (51)$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = b_2\, c_3 - b_3\, c_2, & b_1 = c_2\, a_3 - c_3\, a_2, & c_1 = a_2\, b_3 - a_3\, b_2, \\ a_2 = b_3\, c_1 - b_1\, c_3, & b_2 = c_3\, a_1 - c_1\, a_3, & c_2 = a_3\, b_1 - a_1\, b_3, \\ a_3 = b_1\, c_2 - b_2\, c_1; & b_3 = c_1\, a_2 - c_2\, a_1; & c_3 = a_1\, b_2 - a_2\, b_1. \end{array}\right\} \quad (52)$$

Die Grössen φ, ψ, δ sind die ξ des §. 5, IV. Da wir diese Grössen sehr häufig brauchen werden, so fügen wir hier sofort einige Ergebnisse der Rechnung bei.

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi} = b_1,\ \frac{\partial a_1}{\partial \psi} = -a_2,\ \frac{\partial a_1}{\partial \delta} = c_1 \sin\varphi = a_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \varphi} = -a_1,\ \frac{\partial b_1}{\partial \psi} = -b_2,\ \frac{\partial b_1}{\partial \delta} = c_1 \cos\varphi = b_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial c_1}{\partial \psi} = -c_2,\ \frac{\partial c_1}{\partial \delta} = c_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi} = b_2,\ \frac{\partial a_2}{\partial \psi} = a_1,\ \frac{\partial a_2}{\partial \delta} = c_2 \sin\varphi = -a_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \varphi} = -a_2,\ \frac{\partial b_2}{\partial \psi} = b_1,\ \frac{\partial b_2}{\partial \delta} = c_2 \cos\varphi = -b_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial c_2}{\partial \psi} = c_1,\ \frac{\partial c_2}{\partial \delta} = -c_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \varphi} = b_3,\ \frac{\partial a_3}{\partial \psi} = 0,\ \frac{\partial a_3}{\partial \delta} = c_3 \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial \varphi} = -a_3,\ \frac{\partial b_3}{\partial \psi} = 0,\ \frac{\partial b_3}{\partial \delta} = c_3 \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial c_3}{\partial \psi} = 0,\ \frac{\partial c_3}{\partial \delta} = -\sin\delta.$$

Daraus ergeben sich dann die Differentialquotienten nach t, wie sie sich weiter unten finden [unter (b)].

Wollte man hier die Bedingungsgleichungen (§. 1, III) aufstellen, so hätte man auszudrücken, dass alle Punkte denselben Abstand von einander behalten. Diess würde am Bequemsten dadurch geschehen können, dass man ausser dem festen Punkte (Koordinatenanfang) noch zwei andere Punkte wählen würde, und die Entfernungen eines jeden Punktes des starren Körpers von diesen drei als unveränderlich angegeben würde. Zugleich hätte man die Entfernung der beiden gewählten Punkte vom Koordinatenanfang und unter sich als unveränderlich anzusehen. Bei n Punkten wäre hiernach die Zahl aller Bedingungsgleichungen:

1) wegen der unveränderlichen Entfernungen der $n - 3$ Punkte von den dreien: $3(n-3) = 3n - 9$;
2) wegen der unveränderlichen Entfernungen der drei Punkte unter sich: 3;
3) wegen der Unveränderlichkeit der Koordinaten des festen Punktes ebenfalls 3 (die drei Koordinaten desselben $= 0$).

Die Gesammtzahl aller Bedingungsgleichungen ist somit

$$3n - 9 + 3 + 3 = 3n - 3,$$

und da 3n die Zahl aller zu bestimmenden Koordinaten ist, so bleiben endgiltig noch 3 zu ermitteln. Desshalb (§. 5, I) gibt es drei Grössen ξ. (Aehnlich wird man in §. 9 verfahren.)

Die „Spannungen“ würden sich aus (13), wenn die Aufgabe gelöst ist, d. h. die Koordinaten aller Punkte als Funktionen der Zeit bekannt sind, schon ermitteln lassen, wenn man die innern Kräfte kennen würde. Da diess nicht der Fall ist, so lassen wir diesen Theil der Aufgabe unerledigt. Er gehört ohnehin einem andern Gebiete an.

Berechnung der lebendigen Kraft und der Q.

II. Es ist (§. 5, III)

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Aber

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{da_1}{dt} + y'\frac{db_1}{dt} + z'\frac{dc_1}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = x'\frac{da_2}{dt} + y'\frac{db_2}{dt} + z'\frac{dc_2}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = x'\frac{da_3}{dt} + y'\frac{db_3}{dt} + z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Beachtet man dass (§. 6, II)

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m(y'^2 + z'^2) = \mathfrak{A}, \quad \Sigma m(x'^2 + z'^2) = \mathfrak{B}, \quad \Sigma m(x'^2 + y'^2) = \mathfrak{C}, \\ \Sigma m x'y' = 0, \quad \Sigma m x'z' = 0, \quad \Sigma m y'z' = 0, \end{array}\right\} \quad (53)$$

so ist

$$\left.\begin{array}{l} 2T = \left[\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m x'^2 + \left[\left(\frac{db_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{dt}\right)^2\right. \\ \quad \left. + \left(\frac{db_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m y'^2 + \left[\left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m z'^2, \end{array}\right\} \quad (a)$$

wo

$$\Sigma m x'^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A}), \quad \Sigma m y'^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{B}), \quad \Sigma m z'^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}).$$

Weiter ergibt sich aus den unter I aufgeführten Werthen $\frac{\partial a_1}{\partial \varphi}$ u. s. w.:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{da_1}{dt} = b_1\frac{d\varphi}{dt} - a_2\frac{d\psi}{dt} + c_1 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}, & \frac{da_2}{dt} = b_2\frac{d\varphi}{dt} + a_1\frac{d\psi}{dt} + c_2 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}, \\ & \frac{da_3}{dt} = b_3\frac{d\varphi}{dt} + c_3 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}; \\ \frac{db_1}{dt} = -a_1\frac{d\varphi}{dt} - b_2\frac{d\psi}{dt} + c_1 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}, & \frac{db_2}{dt} = -a_2\frac{d\varphi}{dt} + b_1\frac{d\psi}{dt} + c_2 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}, \\ & \frac{db_3}{dt} = -a_3\frac{d\varphi}{dt} + c_3 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}; \\ \frac{dc_1}{dt} = -c_2\frac{d\psi}{dt} + \sin\psi\cos\delta\frac{d\delta}{dt}, & \frac{dc_2}{dt} = c_1\frac{d\psi}{dt} - \cos\psi\cos\delta\frac{d\delta}{dt}; \\ & \frac{dc_3}{dt} = -\sin\delta\frac{d\delta}{dt}. \end{array}\right\} \quad (b)$$

Hieraus folgt, wenn man die (50) — (52) beachtet (und

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$$

u. s. w. setzt):

$$\left(\frac{d a_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d a_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d a_3}{dt}\right)^2 = \varphi'^2 + (1 - a_3^2)\,\psi'^2 + \sin^2\varphi\,\delta'^2 + 2\,c_3\,\varphi'\psi' - 2\,b_3 \sin\varphi\,\psi'\delta',$$

$$\left(\frac{d b_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d b_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d b_3}{dt}\right)^2 = \varphi'^2 + (1 - b_3^2)\,\psi'^2 + \cos^2\varphi\,\delta'^2 + 2\,c_3\,\varphi'\psi' + 2\,a_3 \cos\varphi\,\psi'\delta'$$

$$\left(\frac{d c_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d c_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d c_3}{dt}\right)^2 = \sin^2\delta\,\psi'^2 + \delta'^2.$$

Hieraus dann

$$\begin{aligned} 2T &= \varphi'^2\mathfrak{C} + \psi'^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\sin^2\delta + \mathfrak{A}\sin^2\varphi\sin^2\delta + \mathfrak{B}\sin^2\delta\cos^2\varphi) + \delta'^2(\mathfrak{B}\sin^2\varphi + \mathfrak{A}\cos^2\varphi) \\ &\quad + 2\varphi'\psi'\mathfrak{C}\cos\delta + 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{A}(\sin^2\varphi\sin^2\delta\,\psi'^2 + 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta + \cos^2\varphi\,\delta'^2) \\ &\quad + \mathfrak{B}(\cos\varphi\sin^2\delta\,\psi'^2 - 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta + \sin^2\varphi\,\delta'^2) \\ &\quad + \mathfrak{C}(\varphi'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\delta + \cos^2\delta\,\psi'^2) \\ &= \mathfrak{A}(\sin\varphi\sin\delta\,\psi' + \cos\varphi\,\delta')^2 + \mathfrak{B}(\cos\varphi\sin\delta\,\psi' - \sin\varphi\,\delta')^2 + \mathfrak{C}(\varphi' + \cos\delta\,\psi')^2. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\sin\delta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\delta}{dt} = p,\ \cos\varphi\sin\delta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\delta}{dt} = q, \\ \frac{d\varphi}{dt} + \cos\delta\frac{d\psi}{dt} = r, \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

so ist

$$T = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}p^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}q^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}r^2. \quad (c)$$

Weiter ist (§. 5, II):

$$Q_1 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial\varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),\ Q_2 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\psi} + Y\frac{\partial y}{\partial\psi} + Z\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$

$$Q_3 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\delta} + Y\frac{\partial y}{\partial\delta} + Z\frac{\partial z}{\partial\delta}\right).$$

Zerlegt man die wirksame Kraft nach den beweglichen Axen, so ist

$$X = a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z',\ Y = a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z',\ Z = a_3 X' + b_3 Y' + c_3 Z',$$

wenn X′, Y′, Z′ die Seitenkräfte nach den neuen Axen sind (§. 3, III).

Daraus

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Sigma[(a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z')(b_1 x' - a_1 y') + (a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z')(b_2 x' - a_2 y') \\ &\quad + (a_3 X' + b_3 Y' + c_3 Z')(b_3 x' - a_3 y')] = \Sigma(x'Y' - y'X'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Sigma[(a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z')(-a_2 x' - b_2 y' - c_2 z') + (a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z')(a_1 x' + b_1 y + c_1 z')] \\ &= a_3\,\Sigma(y'Z' - z'Y') + b_3\,\Sigma(z'X' - x'Z') + c_3\,\Sigma(x'Y' - y'X'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \Sigma[(a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z')(a_3 x' + b_3 y' + c_3 z')\sin\psi \\ &\quad + (a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z')(-a_3 x' - b_3 y' - c_3 z')\cos\psi \\ &\quad + (a_3 X + b_3 Y' + c_3 Z')(x'c_3\sin\varphi + y'c_3\cos\varphi - z'\sin\delta)] \\ &= -\sin\varphi\,\Sigma(z'X' - x'Z') + \cos\varphi\,\Sigma(y'Z' - z'Y'). \end{aligned}$$

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

III. Die (31) sind

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_2, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \delta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_3.$$

Aber nach (c)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \mathfrak{C} r \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = \mathfrak{C} r,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \mathfrak{A} p \frac{\partial p}{\partial \psi'} + \mathfrak{B} q \frac{\partial q}{\partial \psi'} + \mathfrak{C} r \frac{\partial r}{\partial \psi'} = \mathfrak{A} p \sin\varphi \sin\delta + \mathfrak{B} q \cos\varphi \sin\delta + \mathfrak{C} r \cos\delta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \delta'} = \mathfrak{A} p \frac{\partial p}{\partial \delta'} + \mathfrak{B} q \frac{\partial q}{\partial \delta'} + \mathfrak{C} r \frac{\partial r}{\partial \delta'} = \mathfrak{A} p \cos\varphi - \mathfrak{B} q \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \mathfrak{A} p (\cos\varphi \sin\delta \psi' - \sin\varphi \delta') + \mathfrak{B} q (-\sin\varphi \sin\delta \psi' - \cos\varphi \delta')$$
$$= \mathfrak{A} p q - \mathfrak{B} q p = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) p q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \delta} = \mathfrak{A} p \sin\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} + \mathfrak{B} q \cos\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} - \mathfrak{C} r \sin\delta \frac{d\psi}{dt}.$$

Demnach hat man:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{C} \frac{dr}{dt} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) p q = \Sigma (x Y' - y' X'), \\
&\mathfrak{A} \frac{d}{dt}(p \sin\varphi \sin\delta) + \mathfrak{B} \frac{d}{dt}(q \cos\varphi \sin\delta) + \mathfrak{C} \frac{d}{dt}(r \cos\delta) \\
&\quad = \sin\varphi \sin\delta \Sigma (y' Z' - z' Y') + \cos\varphi \sin\delta \Sigma (z' X' - x' Z') \\
&\quad + \cos\delta \Sigma (x' Y - y' X'), \\
&\mathfrak{A} \frac{d}{dt}(p \cos\varphi) - \mathfrak{B} \frac{d}{dt}(q \sin\varphi) - \mathfrak{A} p \sin\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} - \mathfrak{B} q \cos\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} \\
&\quad + \mathfrak{C} r \sin\delta \frac{d\psi}{dt} = - \sin\varphi \Sigma (z' X' - x' Z') + \cos\varphi \Sigma (y' Z' - z' Y').
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Diess sind zunächst die (31). Wir wollen sie jedoch in anderer Form darstellen:

Zu dem Ende multipliziren wir die erste mit

$$-\sin\varphi \cos\delta,$$

die zweite mit

$$\sin\varphi,$$

die dritte mit

$$\cos\varphi \sin\delta$$

und addiren dann alle. Dadurch ergibt sich

$$\mathfrak{A} \frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) r q = \Sigma (y' Z' - z' Y').$$

Eben so multipliziren wir mit

$$-\cos\varphi \cos\delta, \quad \cos\varphi, \quad -\sin\varphi \sin\delta,$$

addiren, und erhalten

$$\mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,p\,r = \Sigma(z'X' - x'Z').$$

Demnach

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\,q\,r &= \Sigma(y'Z' - z'Y'),\\
\mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,p\,r &= \Sigma(z'X' - x'Z'),\\
\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\,p\,q &= \Sigma(x'Y' - y'X').
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Diess ist die Form der Bewegungsgleichungen, die **Euler** aufgestellt. In Verbindung mit (54) bestimmen sie die Bewegung des Körpers.

In den zweiten Seiten fallen alle innern und die nach dem Anfangspunkt gerichteten Kräfte weg (§. 3, I), die also überhaupt in unsern Bewegungsgleichungen nicht vorkommen.

Ist eine Kräftefunktion vorhanden, so sind die zweiten Seiten der (55) nach §. 5, V

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial V}{\partial \psi},\quad \frac{\partial V}{\partial \delta},$$

und unter dieser Form stellt **Lagrange** (Mécanique analytique, II, pag. 206) die Gleichungen der Bewegung auf. Für die (56) wäre

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma(x'Y' - y'X') &= \frac{\partial V}{\partial \varphi},\\
\Sigma(z'X' - x'Z') &= -\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\delta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\delta}\,\frac{\partial V}{\partial \psi} - \sin\varphi\,\frac{\partial V}{\partial \delta},\\
\Sigma(y'Z' - z'Y') &= -\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\delta\,\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\,\frac{\partial V}{\partial \psi} + \cos\varphi\,\frac{\partial V}{\partial \delta},
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

wornach diese Gleichungen umgeschrieben werden könnten.

Kanonische Form.

IV. Nach §. 5, VI ist zu setzen

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \zeta_1,\quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \zeta_2,\quad \frac{\partial T}{\partial \delta'} = \zeta_3,$$

d. h.

$$\mathfrak{C}\,r = \zeta_1,\quad \mathfrak{A}\,p\sin\varphi\sin\delta + \mathfrak{B}\,q\cos\varphi\sin\delta + \mathfrak{C}\,r\cos\delta = \zeta_2,$$
$$\mathfrak{A}\,p\cos\varphi - \mathfrak{B}\,q\sin\varphi = \zeta_3,$$

woraus

$$r = \frac{\zeta_1}{\mathfrak{C}},\quad p = \frac{(\zeta_2 - \zeta_1\cos\delta)\sin\varphi + \zeta_3\cos\varphi\sin\delta}{\mathfrak{A}\sin\delta},$$

$$q = \frac{(\zeta_2 - \zeta_1\cos\delta)\cos\varphi - \zeta_3\sin\varphi\sin\delta}{\mathfrak{B}\sin\delta},$$

$$2T = \frac{[(\zeta_2 - \zeta_1 \cos\delta)\sin\varphi + \zeta_3 \cos\varphi \sin\delta]^2}{\mathfrak{A}\sin^2\delta}$$
$$+ \frac{[(\zeta_2 - \zeta_1 \cos\delta)\cos\varphi - \zeta_3 \sin\varphi \sin\delta]^2}{\mathfrak{B}\sin^2\delta} + \frac{\zeta_1^2}{\mathfrak{C}}. \qquad \text{(d)}$$

Setzt man nun (§. 5, IX)

$$\Phi = T - V, \text{ wo T aus (d) gezogen},$$

so hat man (§. 5, VI)

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1}, & \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_2}, & \frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_3}, \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, & \frac{d\zeta_2}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, & \frac{d\zeta_3}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}, \end{array}\right\} \qquad (58)$$

wo V nur von φ, ψ, δ abhängen darf, t aber auch entwickelt enthalten kann. Die Integration dieses Systems ist in §. 5, VII, VIII vorgeschrieben.

Geschwindigkeit.

V. Die Seitengeschwindigkeiten des Punktes m, zerlegt nach den festen Axen, sind

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

d. h. die drei Grössen

$$x'\frac{da_1}{dt} + y'\frac{db_1}{dt} + z'\frac{dc_1}{dt}; \; x'\frac{da_2}{dt} + y'\frac{db_2}{dt} + z'\frac{dc_2}{dt}; \; x'\frac{da_3}{dt} + y'\frac{db_3}{dt} + z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Zerlegt man dieselben nach den drei beweglichen Axen, so sind die Seitengeschwindigkeiten

$$a_1\frac{dx}{dt} + a_2\frac{dy}{dt} + a_3\frac{dz}{dt}, \; b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dy}{dt} + b_3\frac{dz}{dt}, \; c_1\frac{dx}{dt} + c_2\frac{dy}{dt} + c_3\frac{dz}{dt}.$$

Unter Beachtung von (b) ergibt sich hieraus als Seitengeschwindigkeiten nach den drei beweglichen (Haupt-) Axen:

$$x'[(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\varphi' - (a_1 a_2 - a_1 a_2)(\psi' + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\varphi' - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\psi' + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(a_1 c_2 - a_2 c_1)\psi' + (a_1 c_3 \sin\psi - a_2 c_3 \cos\psi - a_3 \sin\delta)\delta'],$$
$$x'[(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\varphi' - (a_2 b_1 - a_1 b_2)\psi' + (b_1 c_1 + b_2 e_2 + b_3 c_3)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\varphi' - (b_1 b_2 - b_1 b_2)\psi' + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(b_1 c_2 - b_2 c_1)\psi' + (b_1 c_3 \sin\psi - b_2 c_3 \cos\psi - b_3 \sin\delta)\delta'],$$
$$x'[(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\varphi' - (a_2 c_1 - a_1 c_2)\psi' + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\varphi' - (b_2 c_1 - b_1 c_2)\psi' + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(c_1 c_2 - c_1 c_2)\psi' + (c_1 c_3 \sin\psi - c_2 c_3 \cos\psi - c_3 \sin\delta)\delta'].$$

Beachtet man (50), (52) und (54), so sind diese Grössen

$$qz' - ry', \; rx' - pz', \; py' - qx'. \qquad (59)$$

Uebrigens ist hiebei auf die Eigenschaft, dass die beweglichen Axen Hauptaxen sind, keinerlei Rücksicht genommen, was allerdings bei der Berechnung von T der Fall war. Die (59) hätten also allgemeinere Geltung, nur müssten dann die Formeln in II und III anders lauten.

Die eigenthümliche Form der Grössen (59) weist auf eine besondere Beziehung der Grössen p, q, r zur Bewegung, die wir hier betrachten, hin. Um dieselbe aber klar hervortreten zu lassen, wollen wir hier einen Abschnitt der elementaren Mechanik einschieben, der die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen betrifft.

Zusammensetzung von Drehungen.

VI. Wir wollen — abschweifend von unserm Gegenstande — einmal annehmen, ein starrer Körper solle zu gleicher Zeit sich um drei auf einander senkrecht stehende (sich in einem Punkte schneidende) Axen drehen. Wir nehmen diese Geraden zu Koordinatenaxen der x, y, z (die natürlich mit den oben betrachteten Nichts gemein haben).

Dreht ein Punkt sich um irgend eine Axe, von der er in einem Abstand r ist, so ist αr seine Geschwindigkeit, wo α von r unabhängig und die Winkelgeschwindigkeit heisst. Die Axe selbst bildet die Drehaxe, und was den Sinn der Drehung betrifft, so wollen wir uns darüber in folgender Weise verständigen: Stellt man sich in die Drehaxe, die wir als Strahl, d. h. als nur nach einer Seite (vom Koordinatenanfang aus) gezogen denken, so wollen wir die Drehung als positiv bezeichnen, wenn sie von rechts gegen links vor sich geht, dagegen als negativ im entgegengesetzten Falle.

Da eine Gerade nach zwei Seiten hin verlängert werden kann, und eine Drehung, die auf der einen Seite von rechts nach links vor sich geht, von der andern Seite aus gesehen nothwendig von links nach rechts geschieht, so kann man offenbar, wenn man eine positive und negative Richtung der Drehaxe zulässt, auch sagen, es sei eine Drehung als positiv zu bezeichnen, wenn man sich in die positive Richtung der Drehaxe stellen muss, um sie von rechts nach links gehend zu sehen; als negativ dagegen müsse man sie bezeichnen, wenn man sich zu demselben Ende in die negative Richtung der Drehaxe zu stellen hat.

Sind die Koordinatenaxen die Drehaxen, so ist die positive und negative Seite derselben sofort gegeben. Dabei wählen wir die drei Koordinatenaxen so, dass die positive Drehung

um die x Axe von der positiven y Axe zur positiven z Axe,
„ „ y „ „ „ „ z „ „ „ x „,
„ „ z „ „ „ „ x „ „ „ y „

geht. Ist der Körper ein starrer, so geht natürlich überall die Drehung in demselben Sinne vor sich; ist aber ein System betrachtet, was wir hier auch dürfen, so werden wir diess annehmen.

Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit der Rotation (die für alle Punkte des Systems dieselbe ist) durch α bezeichnen, so wird α als positiv angesehen werden, wenn die Drehung eine positive, als negativ wenn sie eine negative ist.

Diess vorausgesetzt wollen wir annehmen, es habe der Punkt dessen Koordinaten x, y, z sind, zu gleicher Zeit drei Bewegungen, die Drehungen seien

um die x Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ξ,
„ „ y „ „ „ „ η,
„ „ z „ „ „ „ ζ,

wo also ξ, η, ζ von x, y, z ganz unabhängig, d. h. für alle Punkte des Systems dieselben seien (positiv oder negativ).

Beachtet man, dass vermöge der Drehung um die x Axe der Punkt einen Kreis beschreiben soll, dessen Halbmesser

$$\sqrt{y^2+z^2},$$

so dass also seine wirkliche Geschwindigkeit

$$\xi\sqrt{y^2+z^2}$$

ist; dass diese Geschwindigkeit senkrecht zur x Axe gerichtet, also parallel zur yz Ebene ist, mithin ihrer Projektion auf diese Ebene gleich; in dieser Ebene senkrecht zu einer Geraden gerichtet ist, die als Projektion des Fahrstrahls nach dem bewegten Punkte erscheint, und endlich von der y Axe zur z Axe gerichtet ist, wenn ξ positiv, umgekehrt wenn ξ negativ: so wird man ganz unmittelbar finden, dass der Punkt die folgenden Geschwindigkeiten mit den beigesetzten Cosinus der Richtungswinkel habe

$$\text{Geschw.} = \xi\sqrt{y^2+z^2}; \quad 0, \quad \frac{-z}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

$$\text{„} \quad = \eta\sqrt{x^2+z^2}; \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad 0, \quad \frac{-x}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\text{„} \quad = \zeta\sqrt{x^2+y^2}; \quad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 0.$$

Demnach sind die Seitengeschwindigkeiten der wirklichen Geschwindigkeit, zerlegt nach den drei Axen:

$$\eta z - \zeta y, \ \zeta x - \xi z, \ \xi y - \eta x, \qquad (\alpha)$$

welche Formeln, wenn man alle obigen Feststellungen beachtet, ganz allgemein gelten und den herkömmlichen Sinn haben, d. h. wenn z. B. $\eta z - \zeta y$ positiv ausfällt, so ist damit ausgesprochen, dass die Seitengeschwindigkeit nach der x Axe im Sinne der positiven x Axe gerichtet ist

Umgekehrt ist aber auch klar, dass wenn in einem Systeme die drei Seitengeschwindigkeiten eines bewegten Punktes, dessen Koordinaten x, y, z sind, durch die Formeln (α) dargestellt sind, wo ξ, η, ζ von x, y, z unabhängig, man sofort auszusprechen das Recht hat, es sei die Bewegung des Systems dieselbe, als wenn alle Punkte des Systems sich um die drei Koordinatenaxen mit den Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ zu drehen haben.

Die drei Grössen (α) sind Null, wenn zu gleicher Zeit

$$\eta z = \zeta y, \ \zeta x = \xi z, \ \xi y = \eta x.$$

Alle Punkte, deren Koordinaten diesen Gleichungen genügen, bleiben folglich in Ruhe. Diese Punkte liegen aber auf einer Geraden, deren Gleichungen

$$\xi \mathfrak{Y} = \eta \mathfrak{X}, \quad \xi \mathfrak{Z} = \zeta \mathfrak{X} \qquad (\beta)$$

sind, wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die laufenden Koordinaten bezeichnen. Diese Gerade geht durch den Koordinatenanfang und ihre (positive) Richtung wollen wir durch die drei Cosinus ihrer Richtungswinkel:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \quad \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \qquad (\beta')$$

feststellen, wo ξ, η, ζ natürlich mit ihren gehörigen Vorzeichen genommen sind. Unter diesen Annahmen lässt sich die Gerade (β) leicht konstruiren.

Vom Koordinatenanfang aus trage man auf die Koordinatenaxen die Längen ξ, η, ζ (nach der positiven oder negativen Richtung der Axen, je nachdem ξ, η, ζ positiv oder negativ sind), konstruire sodann über diesen drei Geraden ein Parallelepiped, so ist die Diagonale vom Anfang aus die Gerade (β), und ihre durch (β') festgestellte Richtung geht vom Anfang in das Innere des Parallelepipeds.

Da alle Punkte dieser Geraden in Ruhe sind, so scheint die eigentliche Bewegung des Systems in einer Drehung um dieselbe zu bestehen. Um diese Vermuthung zur Gewissheit zu erheben, haben wir zu zeigen, dass die Geschwindigkeit eines Punktes (x, y, z) sich darstellen lasse durch $R p$, wo R der Abstand des Punktes von der Geraden (β) und p für alle Punkte dasselbe ist; dass diese Geschwindigkeit senkrecht zur Geraden gerichtet sei, die jenen Abstand gibt und in einer auf der (β) senkrechten Ebene liege, und endlich, dass für alle Punkte die Drehungsrichtung dieselbe sei.

Wir werden diess am Bequemsten erweisen können, wenn wir durch den Anfangspunkt ein zweites Koordinatensystem der x', y', z' legen, so dass die Beziehungen (49) für beide gelten. Sollen auch die (52) gelten, so müssen die positiven Drehungsrichtungen für beide Koordinatensysteme dieselben sein, was wir voraussetzen wollen. In diesem Systeme soll die (β) die z' Axe sein, so dass c_1, c_2, c_3 die drei Werthe (β') haben.

Wir zerlegen nun die wirklichen Geschwindigkeiten nach den neuen Axen und finden aus (α) als Seitengeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
&a_1(\eta z - \zeta y) + a_2(\zeta x - \xi z) + a_3(\xi y - \eta x),\\
&b_1(\eta z - \zeta y) + b_2(\zeta x - \xi z) + b_3(\xi y - \eta x),\\
&c_1(\eta z - \zeta y) + c_2(\zeta x - \xi z) + c_3(\xi y - \eta x),
\end{aligned}$$

d. h. wegen der (β'):

$$\begin{aligned}
&[a_1(c_2 z - c_3 y) + a_2(c_3 x - c_1 z) + a_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[b_1(c_2 z - c_3 y) + b_2(c_3 x - c_1 z) + b_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[c_1(c_2 z - c_3 y) + c_2(c_3 x - c_1 z) + c_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},
\end{aligned}$$

oder wegen der (52) und (49):

$$\begin{aligned}
&[-b_3 z - b_2 y - b_1 x]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = -y'\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[a_3 z + a_2 y + a_1 x]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = x'\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&0,
\end{aligned}$$

von welchen Werthen der letzte bereits aussagt, dass die wirkliche Geschwindigkeit in einer auf (β) senkrechten Ebene (der Ebene der $x'\,y'$ parallel) liege.

Aus den beiden ersten Ausdrücken folgt, dass die wirkliche Geschwindigkeit v durch die Formel

$$v^2 = (y'^2 + x'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = R^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

gegeben sei, wo R den Abstand des bewegten Punktes von (β) bezeichnet und

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

wirklich von der Lage desselben unabhängig ist. Diese Geschwindigkeit macht mit den Axen der x', y' Winkel, deren Cosinus sind

$$\frac{-y'}{R},\ \frac{x'}{R};$$

sie steht folglich senkrecht auf der Geraden R (deren Cosinus der Richtungswinkel

$$\frac{x'}{R} \text{ und } \frac{y'}{R}$$

sind), und geht von der positiven x' Axe zur positiven y' Axe.

Daraus also folgt endgiltig der Satz:

Soll sich ein System von Massenpunkten gleichzeitig um die drei Koordinatenaxen mit den Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ (positiv oder negativ) drehen, so dreht sich dasselbe in Wirklichkeit mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

in positivem Sinne (rechts nach links) um die Gerade (β), deren Konstruktion oben angegeben wurde. Diese Gerade bildet also die wirkliche Drehaxe.

Umgekehrt kann man natürlich jede Drehung um eine Axe in Drehungen um drei auf einander senkrechte Axen zerlegen. Man trägt auf der positiven Richtung der Drehaxe eine Länge gleich der Winkelgeschwindigkeit der Drehung auf, bildet über dieser Linie ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Diagonale sie sei, und dessen Kanten nach den drei Richtungen gehen. Diese drei Kanten, von dem Anfangspunkte aus bilden die positiven Richtungen der drei Drehaxen und die Längen derselben sind die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um dieselben.

Sobald also die drei Seitengeschwindigkeiten eines bewegten Punktes die Form (α) haben, gelten sofort alle unsere Sätze.*

---

* Wir machen keinerlei Anwendung unserer allgemeinen Sätze auf besondere Fälle; bei dem so eben Dargestellten mag aber eine Ausnahme gestattet sein.

So wie wir oben eine Drehung in drei andere zerlegt haben, lässt sie sich auch in zwei zerlegen, wenn die neuen Axen mit der anfänglichen in einer Ebene liegen. Die dabei zu befolgende Regel ist die des Parallelogramms der Kräfte oder Geschwindigkeiten. Sind die neuen Axen auf einander senkrecht, so gibt jede der zwei Drehungen den vollen Betrag der Drehung des Körpers um die betreffende Axe, da dann die Bewegung für die Punkte in der Nähe dieser Axe dieselbe ist in Bezug auf die andere Axe.

Die Erde dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe. Will man diese Drehung zerlegen in die um eine Vertikale (Normale an das Erdellipsoid) und eine in der Ebene dieser Vertikalen und der Erdaxe liegende, auf der erstern senkrechte

Augenblickliche Rotationsaxe. Bedeutung von p, q, r.

VII. Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserm eigentlichen Gegenstand zurück, so sagen die Ausdrücke (59), verglichen mit (α), sofort aus, dass die Bewegung des Körpers zur Zeit t genau so beschaffen sei, als wolle er sich um die (beweglichen) Axen der x', y', z' drehen mit Winkelgeschwindigkeiten p, q, r und zwar genau in der in VI betrachteten Weise, wenn wir die Axen der x', y', z' so gelagert denken, wie dort verlangt. Daraus folgt, dass der Körper sich thatsächlich in diesem Augenblicke um eine Gerade dreht, deren Gleichungen sind

$$p\mathfrak{Y}=q\mathfrak{X},\ p\mathfrak{Z}=r\mathfrak{X}, \qquad (60)$$

und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Die Richtung dieser Drehung wird durch den in VI gefundenen allgemeinen Satz bestimmt.

Die Gerade (60) heisst die augenblickliche Rotationsaxe. Da p, q, r im Allgemeinen mit der Zeit ihre Werthe ändern, so ändert auch die augenblickliche Rotationsaxe fortwährend ihre Lage.

Druck auf den festen Punkt.

VIII. Sind (§. 4) Ξ, H, Z die Seitenkräfte desselben, so gibt die Verbindung der (24) und (13):

$$\Xi=\Sigma X-\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2},\ H=\Sigma Y-\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z=\Sigma Z-\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2},$$

Gerade (was möglich ist, da Vertikale und Erdaxe sich schneiden), so ist die erste Seitendrehung der vollständige Betrag der Erdrotation um die betreffende Vertikale. Stellt man sich in die nach Norden gerichtete Erdaxe, so geht die Drehung im positiven Sinne vor sich (rechts nach links); die Seitendrehung um die Vertikale hat zur Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \cos(90^0-\beta),$$

wenn β die geographische Breite der Vertikalen, d. h. $\omega \sin\beta$. Dieselbe ist positiv, wenn $\beta>0$, negativ wenn $\beta<0$. Für Orte auf der nördlichen Erdhälfte ist also diese Drehung derart, dass wenn man sich in die nach Aussen (gegen den Himmel) gewendete Normale stellt, dieselbe von rechts nach links vor sich geht, während für Orte auf der südlichen Erdhälfte das Umgekehrte stattfindet. Schwingt ein Pendel aus dieser Vertikalen als seiner Ruhelage in einer Ebene, so nimmt dieselbe an der Rotation keinen Antheil, und wird folglich für die Orte auf der nördlichen Erdhälfte von links nach rechts, für Orte auf der südlichen von rechts nach links sich zu drehen scheinen, in allen Fällen also so wie die Sonne am Himmel sich zu bewegen scheint.

Da die Geschwindigkeit dieser Drehung $\omega \sin\beta$ ist, so dauert eine volle Umdrehung $\frac{24}{\sin\beta}$ Stunden. Diess ist die Erklärung des Foucault'schen Pendelversuchs.

wo das Summenzeichen sich auf alle Punkte erstreckt, und in X, Y, Z alle Kräfte vorkommen, die sich nicht zu je zwei aufheben.

Zerlegt man alle Kräfte parallel den neuen Axen, so ist

$$a_1 \Xi' + b_1 H' + c_1 Z' = a_1 \Sigma X' + b_1 \Sigma Y' + c_1 \Sigma Z' - \Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} \text{ u. s. w.},$$

woraus

$$\Xi' = \Sigma X' - \Sigma m \left(a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

$$H' = \Sigma Y' - \Sigma m \left(b_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

$$Z' = \Sigma Z' - \Sigma m \left(c_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right).$$

Aber aus V:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 \frac{dz}{dt} &= q z' - r y', \\ b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{dy}{dt} + b_3 \frac{dz}{dt} &= r x' - p z', \\ c_1 \frac{dx}{dt} + c_2 \frac{dy}{dt} + c_3 \frac{dz}{dt} &= p y' - q x', \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

woraus auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 (q z' - r y') + b_1 (r x' - p z') + c_1 (p y' - q x'), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 (q z' - r y') + b_2 (r x' - p z') + c_2 (p y' - q x'), \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 (q z' - r y') + b_3 (r x' - p z') + c_3 (p y' - q x'). \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Aus den (f) folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{da_3}{dt} = (q z' - r y') \left(a_1 \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{da_3}{dt} \right) \\ + (r x' - p z') \left(b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt} \right) \\ + (p y' - q x') \left(c_1 \frac{da_1}{dt} + c_2 \frac{da_2}{dt} + c_3 \frac{da_3}{dt} \right). \end{aligned}$$

Aber aus (51) folgt sofort

$$a_1 \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{da_3}{dt} = 0;$$

ferner wie in V:

$$b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt} = r, \quad c_1 \frac{da_1}{dt} + c_2 \frac{da_2}{dt} + c_3 \frac{da_3}{dt} = -q,$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}\frac{da_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{da_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{da_3}{dt}&=r(rx'-pz')-q(py'-qx'),\\
\frac{dx}{dt}\frac{db_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{db_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{db_3}{dt}&=-r(qz'-ry')+p(py'-qx'),\\
\frac{dx}{dt}\frac{dc_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dc_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dc_3}{dt}&=q(qz'-ry')-p(rx'-pz'),
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

von welchen Gleichungen die zwei letzten eben so gefunden werden wie die erste. (Vergl. §. 11, V.)

Aus (e) folgt

$$a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_3\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{da_1}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{da_2}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{da_3}{dt}\frac{dz}{dt}=z'\frac{dq}{dt}-y'\frac{dr}{dt},$$

so dass wegen (g):

$$a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_3\frac{d^2z}{dt^2}=z'\frac{dq}{dt}-y'\frac{dr}{dt}-r(rx'-pz')+q(py'-qx').$$

Demnach endlich, wenn man mit den übrigen Gleichungen eben so verfährt:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi'&=\Sigma X'-\frac{dq}{dt}\Sigma m z'+\frac{dr}{dt}\Sigma m y'+(q^2+r^2)\Sigma m x'-pq\Sigma m y'-pr\Sigma m z',\\
H'&=\Sigma Y'-\frac{dr}{dt}\Sigma m x'+\frac{dp}{dt}\Sigma m z'-pq\Sigma m x'+(p^2+r^2)\Sigma m y'-qr\Sigma m z',\\
Z'&=\Sigma Z'-\frac{dp}{dt}\Sigma m y'+\frac{dq}{dt}\Sigma m x'-pr\Sigma m x'-qr\Sigma m y'+(p^2+q^2)\Sigma m z'.
\end{aligned}\right\}\quad (61)$$

Aus den (61) folgt sofort, dass wenn der feste Punkt der Schwerpunkt ist, bloss

$$\Xi'=\Sigma X',\ H'=\Sigma Y',\ Z'=\Sigma Z',$$

d. h. also dass der Bewegungszustand (p, q, r) keinen Einfluss auf den Druck, den der feste Punkt erleidet, ausübt.

Besonderer Fall, da keine äussern Kräfte vorhanden sind. Stabilität der Rotation.

IX. Jetzt heissen die (56) (vergl. übrigens §. 3, I):

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})qr=0,\ \mathfrak{B}\frac{dq}{dt}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})pr=0,\ \mathfrak{C}\frac{dr}{dt}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})pq=0. \quad (62)$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{A}p\frac{dp}{dt}+\mathfrak{B}q\frac{dq}{dt}+\mathfrak{C}r\frac{dr}{dt}=0,\ \mathfrak{A}^2p\frac{dp}{dt}+\mathfrak{B}^2q\frac{dq}{dt}+\mathfrak{C}^2r\frac{dr}{dt}=0,$$

d. h.

$$\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2=\alpha^2,\ \mathfrak{A}^2p^2+\mathfrak{B}^2q^2+\mathfrak{C}^2r^2=\beta^2, \quad (63)$$

wo α^2 und β^2 zwei (positive) Konstanten. Aus (63) folgt:

$$p^2 = \frac{\alpha^2 \mathfrak{B} - \beta^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) r^2}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}, \quad q^2 = \frac{\beta^2 - \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) r^2}{\mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})},$$

wobei freilich $\mathfrak{B}$ nicht $= \mathfrak{A}$ sein darf.

Sei nun im Anfange der Bewegung $p = 0$, $q = 0$, $r = r_0$, so ist

$$\alpha^2 = \mathfrak{C} r_0^2, \quad \beta^2 = \mathfrak{C}^2 r_0^2,$$

also

$$p^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}(r_0^2 - r^2), \quad q^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}(r_0^2 - r^2).$$

Gesetzt nun es sei $\mathfrak{C}$ das grösste der drei Trägheitsmomente, so wäre

$$p^2 q^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})}{\mathfrak{A}^2 (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^2}(r_0^2 - r^2)^2$$

offenbar negativ, was unzulässig ist. Demnach muss p^2 (oder q^2) Null sein, d. h. $r^2 = r_0^2$ und folglich immer $p = q = 0$.

Ist $\mathfrak{C}$ das kleinste der drei (Haupt-) Trägheitsmomente, so gilt dasselbe; ist aber $\mathfrak{C}$ das mittlere, so kann man denselben Schluss nicht mehr machen. Beginnt also der Körper (wenn keine äussern Kräfte wirken) seine Drehung um die Axe des grössten oder kleinsten der drei Hauptträgheitsmomente, so dreht er sich immer mit gleichförmiger Geschwindigkeit um dieselbe Axe.

X. Die obigen Entwicklungen schliessen den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$) aus.

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist aus (62) sofort

$$p = \alpha, \quad q = \beta, \quad r = \gamma,$$

wo α, β, γ Konstanten, und die Sache ist erledigt.

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = r_0;$$

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) q r_0 = 0, \quad \mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) p r_0 = 0 \, (\mathfrak{A} = \mathfrak{B}).$$

$$\mathfrak{A} p \frac{dp}{dt} + \mathfrak{B} q \frac{dq}{dt} = 0, \quad p^2 + q^2 = \alpha^2,$$

und wenn anfänglich $p = 0$, $q = 0$, so ist $\alpha^2 = 0$, also immer $p = 0$, $q = 0$.

In diesen Fällen gilt der Satz ebenfalls, wobei $\mathfrak{C}$ jedenfalls als das kleinste oder grösste der Hauptträgheitsmomente angesehen werden kann.

Für den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ wollen wir anfänglich $p = r = 0$, $q = q_0$ annehmen. Dann wäre allgemein $r = 0$ und also

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0; \quad p = 0, \quad q = q_0,$$

also würde auch jetzt eine Stabilität der Rotation um eine der gleichen Axen stattfinden. (Die Ergebnisse in IX und X gelten auch, wenn die Kräfte nach dem festen Punkt gerichtet sind, wie aus §. 3, I sofort erhellt.)

§. 9.

Allgemeinste Bewegung eines starren freien Körpers.

I. Ist ein starrer Körper vollkommen frei beweglich, so wird die Lage aller seiner einzelnen Punkte genau bekannt sein, wenn man zur Zeit t kennt:

die Lage eines bestimmten Punktes dieses Körpers,

die Lage dreier durch diesen Punkt gehender, mit dem Körper fest verbundener rechtwinkliger Axen.

Dazu reichen sechs Bestimmungsstücke aus, nämlich die Koordinaten des fraglichen Punktes, bezogen auf ein im Raume unveränderliches Koordinatensystem und die drei Richtungswinkel φ, ψ, ϑ des §. 8, I.

Als den bestimmten Punkt wählen wir den Schwerpunkt und als fest mit ihm verbundene Axen die durch diesen Schwerpunkt gehenden Hauptaxen (§. 6, V), wobei wir wohl nicht besonders anzumerken brauchen, dass diese Wahl eine willkürliche ist, und sich vorerst nur dadurch empfiehlt, dass die betreffenden Stücke sich immer auffinden lassen. Allerdings wird sich auch herausstellen, dass dadurch die Behandlung vereinfacht wird.

Seien zur Zeit t

ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts,

φ, ψ, ϑ die drei Winkel des §. 8, I,

Alles bezogen auf ein festes Koordinatensystem der x, y, z, wobei die Konstruktion des beweglichen Koordinatensystems dadurch vollzogen wird, dass man zuerst durch den Schwerpunkt ein mit dem festen paralleles legt und von diesem aus nach der Vorschrift in §. 8, I das bewegliche der x', y', z' mittelst der Winkel φ, ψ, ϑ konstruirt.

Beziehen sich, für den Punkt m, die Werthe x', y', z' auf die beweglichen Axen, so hat man

$$x = \xi + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \quad y = \eta + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$
$$z = \zeta + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \qquad \text{(a)}$$

wo

$$a_1, \ldots, c_3$$

dieselben Werthe haben wie in §. 8, also natürlich auch alle dort gefundenen Beziehungen gelten.

Berechnung der lebendigen Kraft und der Q.

II. Es ist

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}+x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}.$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}+x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Zugleich ist, weil der gewählte Punkt Schwerpunkt ist:

$$\Sigma m x'=0,\ \Sigma m y'=0,\ \Sigma m z'=0; \tag{b}$$

und weil die Axen Hauptaxen sind (§. 6, II, VI)

$$\Sigma m x'y'=0,\ \Sigma m x'z'=0,\ \Sigma m x'z'=0,\ \Sigma m(x'^2+y'^2)=\mathfrak{H},\ \Sigma m(x'^2+z'^2)=\mathfrak{G},$$
$$\Sigma m(y'^2+z'^2)=\mathfrak{F}, \tag{c}$$

so dass

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+2\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}\right)$$
$$+2\frac{d\zeta}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}\right)+\Sigma m\left[\left(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}\right)^2+\left(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}\right)^2\right],$$

d. h. mit Berücksichtigung von (b) und (c), so wie §. 8, II:

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2.$$

Aber wenn M die Masse, so ist $\Sigma m=M$, mithin

$$2T=M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2, \tag{63}$$

wo p, q, r durch (54) gegeben sind und

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

das Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunkts ausdrückt.

Für die (sechs) Q hat man:

$$Q_1=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\xi}+Y\frac{\partial y}{\partial\xi}+Z\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)=\Sigma X,$$

$$Q_2=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\eta}+Y\frac{\partial y}{\partial\eta}+Z\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=\Sigma Y,$$

$$Q_3=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\zeta}+Y\frac{\partial y}{\partial\zeta}+Z\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)=\Sigma Z;$$

Q_4, Q_5, Q_6 haben dieselben Werthe wie Q_1; Q_2, Q_3 in §. 8, II.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

III. Die Grössen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$$

sind die $\mathfrak{z}$ des §. 5, IV, wo $k = 6$, so dass man also hat

$$\left.\begin{aligned}
&M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X,\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z,\\
&\mathfrak{F}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{G})\,q\,r = \Sigma(y'Z' - z'Y'),\\
&\mathfrak{G}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{H})\,p\,r = \Sigma(z'X' - x'Z'),\\
&\mathfrak{H}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{G} - \mathfrak{F})\,p\,q = \Sigma(x'Y' - y'X').
\end{aligned}\right\}\quad (64)$$

Die drei ersten Gleichungen sind die (14) des §. 2, die drei anderen die (56) des §. 8. Doch ist hiebei zu beachten, dass die zweiten Seiten der (64) im Allgemeinen die sechs Grössen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$$

enthalten können.

Enthalten

$$\Sigma X,\ \Sigma Y,\ \Sigma Z$$

nur

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,$$

so ist die Bewegung des Schwerpunkts unabhängig von der Rotation und die Aufgabe dadurch erleichtert.

Kanonische Form, im Falle einer Kräftefunktion.

IV. Ist eine Kräftefunktion V (§. 5, V) vorhanden, so setze man (§. 5, VI)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = \lambda_1,\ \frac{\partial T}{\partial \eta'} = \lambda_2,\ \frac{\partial T}{\partial \zeta'} = \lambda_3,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \lambda_4,\ \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \lambda_5,\ \frac{\partial T}{\partial \delta'} = \lambda_6,$$

von welchen Gleichungen die drei ersten heissen

$$M\xi' = \lambda_1,\ M\eta' = \lambda_2,\ M\zeta' = \lambda_3,$$

die drei andern aber wie in §. 8, IV lauten; und bestimme hieraus

$$\xi',\ \eta',\ \zeta',\ \varphi',\ \psi',\ \delta',$$

welche Werthe in T (§. 5, IX) einzusetzen sind, wodurch diese Grösse (§. 8, IV) wird

$$\begin{aligned}
2T = {} & \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{M} + \frac{[(\lambda_5 - \lambda_4\cos\delta)\sin\varphi + \lambda_6\cos\varphi\sin\delta]^2}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}\\
& + \frac{[\lambda_5 - \lambda_4\cos\delta)\cos\varphi - \lambda_6\sin\varphi\sin\delta]^2}{\mathfrak{G}\sin^2\delta} + \frac{\lambda_4^2}{\mathfrak{H}}.
\end{aligned}\quad (d)$$

Setzt man nun (§. 5, IX, §. 8, IV)

$\Phi = \mathrm{T} - \mathrm{V}$, T aus (d) gezogen, V in $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$ ausgedrückt,

so ist (§. 5, VI):

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1},\quad \frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2},\quad \frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_3},\quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_4},\quad \frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_5},\quad \frac{d\delta}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_6};$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi},\quad \frac{d\lambda_2}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\quad \frac{d\lambda_3}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta},\quad \frac{d\lambda_4}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\quad \frac{d\lambda_5}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\psi},\quad \frac{d\lambda_6}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\delta}. \qquad (64')$$

Dabei kann V ganz wohl noch t enthalten (nur nicht die Differentialquotienten von $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$).

Integration.

V. Enthält Φ (d. h. V) die Zeit t entwickelt, so hat man nach §. 5, VII einen Werth λ als Funktion von

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta,\ t$$

mit sechs willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_6,$$

von denen jedoch keine bloss addirt sein darf, zu suchen, welcher der partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\mathrm{M}}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{1}{2\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2\\&\quad+\frac{1}{2\mathfrak{G}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\sin\varphi\sin\delta\right]^2\\&\quad+\frac{1}{2\mathfrak{J}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi+\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\cos\varphi\sin\delta\right]^2-\mathrm{V}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

genügt, und hat dann als Integralgleichungen der Bewegung die (39'), nämlich

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=\mathrm{M}\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\eta}=\mathrm{M}\frac{d\eta}{dt},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}=\mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\varphi'},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\psi}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\psi'},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\delta}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\delta'};\\&\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_3}=\beta_3,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_4}=\beta_4,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_5}=\beta_5,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}=\beta_6,\end{aligned}\right\}\quad(65')$$

mit den zwölf willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_6,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_6.$$

Dabei lösen die sechs letzten (65') die Aufgabe; die sechs ersten dienen zur Kontrole und (etwa) Bestimmung der willkürlichen Konstanten, ergeben sich aber selbstverständlich aus den andern. Aus §. 8, III ist

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\psi'}=\mathfrak{J}\,\mathrm{p}\sin\varphi\sin\delta+\mathfrak{G}\,\mathrm{q}\cos\varphi\sin\delta+\mathfrak{H}\,\mathrm{r}\cos\delta,\\&\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\delta'}=\mathfrak{J}\,\mathrm{p}\cos\varphi-\mathfrak{G}\,\mathrm{q}\sin\varphi,\quad \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\varphi'}=\mathfrak{H}\,\mathrm{r}.\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{f})$$

VI. Enthält V, also auch Φ die Zeit nicht entwickelt, so hat man eine Auflösung der partiellen Differentialgleichung (§. 5, VIII)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2M}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{1}{2\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2\\&+\frac{1}{2\mathfrak{G}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\sin\varphi\sin\delta\right]^2\\&+\frac{1}{2\mathfrak{F}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi+\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\cos\varphi\sin\delta\right]^2-V+a=0\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

zu suchen mit fünf willkürlichen Konstanten (keine addirt)

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_5,$$

und es sind die Integralgleichungen der Aufgabe:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=M\frac{d\xi}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\eta}=M\frac{d\eta}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}=M\frac{d\zeta}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}=\frac{\partial T}{\partial\varphi'},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\psi}=\frac{\partial T}{\partial\psi'},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\delta}=\frac{\partial T}{\partial\delta'};\\&\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_3}=\beta_3,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_4}=\beta_4,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_5}=\beta_5,\ \frac{\partial\lambda}{\partial a}+t=\beta_6,\end{aligned}\right\}\quad(66')$$

mit den zwölf willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_5,\ a,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_6.$$

Fall, da keine äussern Kräfte vorhanden sind.

VII. Die (64) heissen jetzt:

$$\left.\begin{aligned}&M\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ M\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0;\\&\mathfrak{F}\frac{dp}{dt}+(\mathfrak{H}-\mathfrak{G})qr=0,\ \mathfrak{G}\frac{dq}{dt}+(\mathfrak{F}-\mathfrak{H})pr=0,\ \mathfrak{H}\frac{dr}{dt}+(\mathfrak{G}-\mathfrak{F})pq=0,\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

woraus sofort klar ist, dass die Bewegung des Schwerpunkts und die Rotation um denselben von einander ganz unabhängig sind. Es gelten für beide jetzt die in §. 2, III und §. 8, IX einzeln gefundenen Gesetze.

Der Schwerpunkt bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie, und um ihn dreht sich der Körper als wie wenn dieser Schwerpunkt fest wäre. Von einem Druck auf den Schwerpunkt kann hier keine Rede sein, weil kein fester Punkt vorhanden ist (§. 4).

Wollte man nach VI ($V=0$) verfahren, so hätte man die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{1}{\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2\\&+\frac{1}{\mathfrak{G}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\sin\varphi\sin\delta\right]^2\\&+\frac{1}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi+\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\cos\varphi\sin\delta\right]^2+2a=0,\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

und die (66′) lösen die Aufgabe.

In (68) kann man sofort setzen

$$\lambda = (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta) \sqrt{M} + \alpha_4 \psi + \mu \qquad (g)$$

und dann μ mit einer weitern Konstanten α_5 aus

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a + \frac{1}{\mathfrak{H}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{\mathfrak{G} \sin^2 \delta} \left[\left(\alpha_4 - \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \cos \delta\right) \cos \varphi - \frac{\partial \mu}{\partial \delta} \sin \varphi \sin \delta\right]^2 \\ &+ \frac{1}{\mathfrak{F} \sin^2 \delta} \left[\left(\alpha_4 - \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \cos \delta\right) \sin \varphi + \frac{\partial \mu}{\partial \delta} \cos \varphi \sin \delta\right]^2 = 0 \qquad (68') \end{aligned}$$

bestimmen.

Die (66′) sind jetzt:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \sqrt{M} = M \frac{d\xi}{dt}, \quad \alpha_2 \sqrt{M} = M \frac{d\eta}{dt}, \quad \alpha_3 \sqrt{M} = M \frac{d\zeta}{dt}; \\ &\xi \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \eta \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \zeta \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_3} = \beta_3; \\ &\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \alpha_4 = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \delta} = \frac{\partial T}{\partial \delta'}, \\ &\psi + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_4} = \beta_4, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_5} = \beta_5, \quad \frac{\partial \mu}{\partial a} + t = \beta_6. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Die Summe

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a$$

geht ungetrennt in μ ein; heisst sie c, so ist

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \mu}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_3} = 2\alpha_3 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial a} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial c}.$$

Da nun

$$\frac{\partial \mu}{\partial a} = \beta_6 - t, \quad \frac{\partial \mu}{\partial c} = \tfrac{1}{2}\beta_6 - \tfrac{1}{2}t,$$

so heissen die sechs ersten (h):

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \sqrt{M} = M \frac{d\xi}{dt}, \quad \alpha_2 \sqrt{M} = M \frac{d\eta}{dt}, \quad \alpha_3 \sqrt{M} = M \frac{d\zeta}{dt}, \\ &\xi \sqrt{M} + \alpha_1 \beta_6 - \alpha_1 t = \beta_1, \quad \eta \sqrt{M} + \alpha_2 \beta_6 - \alpha_2 t = \beta_2, \quad \zeta \sqrt{M} + \alpha_3 \beta_6 - \alpha_3 t = \beta_3, \end{aligned}\right\} \quad (h')$$

wodurch die ersten drei mit den letzten zusammenstimmen, und die Bewegung des Schwerpunkts bestimmen. Die sechs letzten in (h) bestimmen die Rotation. Dass in die (h′) scheinbar sieben Konstanten eintreten

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_6)$$

wird keine Schwierigkeit machen, da man offenbar die (h′) schreiben kann:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{M}}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{M}}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{M}},$$

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{M}} t + C_1, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{\sqrt{M}} t + C_2, \quad \zeta = \frac{\alpha_3}{\sqrt{M}} t + C_3,$$

wodurch sie vollständig zusammenfallen und nur sechs Konstanten enthalten.

Für den besondern Fall dass $\mathfrak{f} = \mathfrak{G}$, wird die (68'):

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha + \frac{1}{\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{f}\sin^2\delta}\left[\left(\alpha_4 - \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\cos\delta\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\delta}\right)^2\sin^2\delta\right] = 0,$$

wo man noch

$$\mu = \alpha_5\varphi + \nu$$

setzen kann und ν zu bestimmen ist (ohne Konstante) aus

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a + \frac{\alpha_5^2}{\mathfrak{H}} + \frac{(\alpha_4 - \alpha_5\cos\delta)^2}{\mathfrak{f}\sin^2\delta} + \frac{1}{\mathfrak{f}}\left(\frac{\partial\nu}{\partial\delta}\right)^2 = 0;$$

demnach wäre jetzt

$$\lambda = (\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta)\sqrt{M} + \alpha_4\psi + \alpha_5\varphi$$

$$\pm\sqrt{\mathfrak{f}}\int\sqrt{-2a - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \frac{\alpha_5^2}{\mathfrak{H}} - \frac{(\alpha_4 - \alpha_5\cos\delta)^2}{\mathfrak{f}\sin^2\delta}}\,\partial\delta$$

und das Problem vollständig gelöst. Zusammengesetzter ist die Auflösung allerdings, wenn nicht $\mathfrak{f} = \mathfrak{G}$; doch hat Richelot (Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1850) auch diesen Fall gelöst. (Eigentlich den zu §. 8 gehörigen, doch ist die Rechnung ganz dieselbe).

§. 10.

Untersuchungen über die lebendige Kraft.

I. Nach §. 5, III nennt man die Grösse

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \qquad (69)$$

die lebendige Kraft eines Systems zur Zeit t, wo x, y, z die (rechtwinkligen) Koordinaten eines Punktes des Systems (von der Masse) m sind, und das Summenzeichen sich auf alle Punkte des Systems erstreckt.

Heisst man v die Geschwindigkeit des Punktes m, so ist auch

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2. \qquad (69')$$

Mit der genauern Betrachtung dieser Grösse wollen wir uns hier beschäftigen.

Multiplizirt man die (13) bezüglich mit

$$\frac{dx_r}{dt},\ \frac{dy_r}{dt},\ \frac{dz_r}{dt},$$

so ergibt die Addition:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_r m_r \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_r}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\Sigma_r\left(X_r\frac{dx_r}{dt}+Y_r\frac{dy_r}{dt}+Z_r\frac{dz_r}{dt}\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma_r\Sigma_s P_{r,s}\frac{d\varrho_{r,s}}{dt}$$
$$+\Sigma_r\Sigma_e S_e\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{dy_r}{dt}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt}\right),$$

wo auf der zweiten Seite im ersten Gliede sich das Summenzeichen Σ_r auf alle Punkte des Systems erstreckt; in dem Gliede

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_r\Sigma_s P_{r,s}\frac{d\varrho_{r,s}}{dt}$$

aber das eine Summenzeichen Σ_s zunächst bei festem r auf alle Punkte, d. h. auf alle s, * und dann das zweite Σ_r auf alle r; im dritten Gliede bezieht sich das Summenzeichen Σ_e auf alle e (was ohne Anstand zuzulassen ist, da, wenn die Koordinaten des Punktes m_r in einem u nicht vorkommen, dann

$$\frac{\partial u}{\partial x_r},\ \frac{\partial u}{\partial y_r},\ \frac{\partial u}{\partial z_r}$$

Null sind), das zweite Σ_r auf alle r.

Aber aus $u_e = 0$ folgt

$$\frac{\partial u_e}{\partial t}+\Sigma_r\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{dy_r}{dt}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt}\right)=0,$$

also (§. 5, II)

$$\frac{dT}{dt}=\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P\frac{d\varrho}{dt}-\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}, \qquad (70)$$

wenn wir kurzweg $P_{r,s}$ durch P bezeichnen, $\varrho_{r,s}$ durch ϱ und die Summirungen wie oben verstanden sind.

Verstehen wir unter X, Y, Z die Seitenkräfte aller auf m wirkenden Kräfte, also sowohl der äussern als der innern, so können wir das zweite Glied der zweiten Seite mit dem ersten zusammenziehen und haben dann:

$$\frac{dT}{dt}=\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)-\Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}. \qquad (71)$$

II. Die Grösse

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}$$

lässt sich noch etwas anders ausdrücken. Seien nämlich

$$U_1, U_2, \ldots, U_a$$

die Kräfte, die auf den (einen) Punkt m wirken;

---

* Man kann Σ_s auf alle Punkte sich erstrecken lassen, d. h.

$$s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

setzen, da wenn ein Punkt auf m_r nicht mehr wirkt, nothwendig $P_{r,s}$ Null ist. Dass der Faktor $\tfrac{1}{2}$ zuzufügen war, ist aus §. 5, X klar.

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \ldots : \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

ihre Richtungswinkel, so ist

$$X = U_1 \cos\alpha_1 + \ldots + U_n \cos\alpha_n, \quad Y = U_1 \cos\beta_1 + \ldots + U_n \cos\beta_n,$$
$$Z = U_1 \cos\gamma_1 + \ldots + U_n \cos\gamma_n.$$

Demnach

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = U_1\left(\cos\alpha_1\frac{dx}{dt} + \cos\beta_1\frac{dy}{dt} + \cos\gamma_1\frac{dz}{dt}\right)$$
$$+ \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ U_n\left(\cos\alpha_n\frac{dx}{dt} + \cos\beta_n\frac{dy}{dt} + \cos\gamma_n\frac{dz}{dt}\right).$$

Sei s der Bogen der Kurve, die m beschreibt, so ist $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes (immer positiv gedacht), und wenn α, β, γ die Richtungswinkel derselben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\gamma,$$

so dass

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = U_1\,(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)\frac{ds}{dt}$$
$$+ \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ U_n\,(\cos\alpha\cos\alpha_n + \cos\beta\cos\beta_n + \cos\gamma\cos\gamma_n)\frac{ds}{dt}.$$

Ist nun aber φ_1 der Winkel, den die Richtung der Kraft U_1 mit der Richtung der Geschwindigkeit macht: * ....., φ_n dieselbe Grösse für U_n: so ist also

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = (U_1\cos\varphi_1 + \ldots + U_n\cos\varphi_n)\frac{ds}{dt}.$$

Ist R die Resultirende aller auf m wirkenden Kräfte, φ der Winkel den ihre Richtung mit der Geschwindigkeits (= Bewegungs)-Richtung von m macht, so ist

$$U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2 + \ldots + U_n\cos\varphi_n = R\cos\varphi, \qquad (72)$$

so dass endlich die (71) heisst

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma R\cos\varphi\frac{ds}{dt} - \Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t} = \Sigma v R\cos\varphi - \Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}, \qquad (73)$$

wo v die Geschwindigkeit des Punktes m (auf den R wirkt). Dabei ist φ zwischen 0 und 180° gerechnet. (R ist natürlich durchaus positiv gedacht).

---

* Alle Geraden sind als Strahlen, d. h. nur nach einer Richtung hin verlängert, aufgefasst.

Aus (73) folgt

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt - \Sigma_e \int_\tau^t S_e \frac{\partial u_e}{\partial t} dt \tag{74}$$

oder auch

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R v \cos\varphi\, dt - \Sigma_e \int_\tau^t S_e \frac{\partial u_e}{\partial t} dt,$$

worin T_0 der Werth von T für $t = \tau$ ist (und die obere Gränze der bestimmten Integrale grösser als τ soll gedacht sein, da wir die Zeit immer als wachsend angesehen haben). Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass in dem Systeme nur stetige Aenderungen vor sich gehen.

Wir müssen übrigens noch auf einen weitern Punkt aufmerksam machen. Da wir offenbar annehmen dürfen, dass der Bogen s mit der Zeit unaufhörlich wachse, so ist $\frac{ds}{dt}$ für uns kurzweg positiv, und nehmen wir also auch v geradezu als positiv an, so dass die Richtung von v dieselbe ist mit der Richtung der berührenden Geraden an den Punkt des Bogens, in dem m sich zur Zeit t befindet, diese Gerade nach der Seite des wachsenden Bogens hin gezogen. * Der Winkel φ ist folglich spitz, wenn Kraft und die so erklärte Geschwindigkeitsrichtung einen spitzen Winkel machen, so dass die Projektion der Kraft auf diese Richtung der berührenden Geraden auf die Seite des wachsenden Bogens fällt; φ ist stumpf, wenn die Projektion der Kraft auf die entgegengesetzte Seite fällt.

Begriff der Arbeit.

III. Die erste Grösse der zweiten Seite in (74) lässt sich noch etwas anders auslegen. Hält man den Begriff des bestimmten Integrals fest so ist

$$\int_\tau^t v R \cos\varphi\, dt$$

die Summe der Elemente

$$v R \cos\varphi\, \Delta t,$$

---

* Ist so $v = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, so sind die Cosinus der Richtungswinkel derselben mit den Koordinatenaxen

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds},$$

wo $\frac{dx}{ds}$ positiv ist, wenn x wächst mit s, also mit der Zeit u. s. w. Demnach sind die Projektionen der Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt},\ \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt},\ \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt}.$$

wie sich gehört.

wenn Δt unendlich klein. Eben so ist

$$\int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt$$

die Summe der Elemente

$$R \cos\varphi \frac{ds}{dt} \Delta t.$$

Aber $v \Delta t$ ist das Element des Weges $= \Delta s$, so dass

$$v R \cos\varphi \Delta t = R \cos\varphi \Delta s,$$

wo Δs immer als positiv betrachtet wird.

$$R \cos\varphi$$

ist die Projektion der Kraft auf die Richtung dieses (mit wachsender Zeit wachsenden) Weges, so dass also

$$R \cos\varphi \Delta s$$

gleich ist dem (positiven) Wege Δs, den der Punkt in der unendlich kleinen Zeit Δt zurücklegt, multiplizirt mit der nach der Richtung des Weges zerlegten Kraft. * Dieses Produkt nennt man die Arbeit der Kraft in der Zeit Δt. Demnach stellt das erste Glied der zweiten Seite in (74) die Gesammtsumme der Arbeit aller Kräfte in der Zeit $t - \tau$ vor.

---

* Das bestimmte Integral

$$\int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt$$

kurzweg gleich

$$\int_\sigma^s R \cos\varphi \, ds$$

setzen ist nach unserer Anschauung nicht zulässig, wenn nicht

$$R \cos\varphi$$

eine Funktion von s allein ist. Aber wenn man die „unendlich Kleinen" vermeiden will, so ist

$$\int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \sum_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} \Delta t;$$

ferner $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} + \alpha$, wo $Gr\, \alpha = 0$, so dass also

$$\int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \Sigma R \cos\varphi \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} - \alpha\right) \Delta t = Gr \Sigma R \cos\varphi \Delta s - Gr \Sigma \alpha R \cos\varphi \Delta t.$$

Da nun $\alpha R \cos\varphi$ mit Δt gegen Null geht, so ist bekanntlich

$$Gr \Sigma \alpha R \cos\varphi \Delta t = 0,$$

so dass

$$\int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \sum_\tau^t R \cos\varphi \Delta s.$$

Diess ist die strengere Begründung der ausgesprochenen Sätze.

Die (Elementar-) Arbeit

$$R \cos\varphi \, \Delta s$$

ist positiv, wenn $\cos\varphi$ positiv, d. h.

$$\varphi < 90^\circ;$$

sie ist negativ, wenn

$$\varphi > 90^\circ.$$

Macht also die Richtung der Kraft (nach der Seite hin gezählt, nach der sie den Punkt zu treiben sucht) mit der Richtung der wirklichen Bewegung einen spitzen Winkel, so ist die Arbeit der Kraft positiv oder fördernd; machen beide Richtungen dagegen einen stumpfen Winkel, so ist diese Arbeit negativ oder hemmend. Die letztere pflegt man auch widerstehende Arbeit oder kurzweg Widerstand zu heissen. Das oben betrachtete Glied in (74) ist der Unterschied beider Arten von Arbeiten.

Steht eine Kraft senkrecht zur Richtung des Weges, so ist ihre Arbeit gleich Null ($\varphi = 90^\circ$). Also wenn ein Punkt auf einer unveränderlichen Fläche bleiben muss, so ist die Arbeit des Druckes Null; wirklich fällt auch, wenn

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0,$$

die Grösse u_e ganz in der Rechnung weg. Nach (72) ist übrigens die Arbeit der Resultirenden gleich der (algebraischen) Summe der Arbeiten aller Componenten.

Fall der Bedingungsgleichungen, welche die Zeit nicht enthalten.

IV. Sind die Gleichungen $u_e = 0$ (§. 1, VI) so beschaffen, dass sie die Zeit t nicht entwickelt enthalten (d. h. also die betreffenden Flächen sich mit der Zeit nicht ändern), was in den meisten Fällen eintrifft, so heisst die (74):

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = \Sigma \int_\tau^t \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt, \quad (74')$$

und es ist die Zunahme der lebendigen Kraft in der Zeit $t - \tau$ gleich dem Ueberschuss der fördernden Arbeit über die hemmende. Dabei ist zu beachten, dass T niemals negativ sein kann, wie diess aus (69) sofort hervorgeht, und dass für $T = 0$ nothwendig $v = 0$, dass dann also nothwendig alle Punkte stille stehen.

Arbeitsfähigkeit eines Systems.

V. Gesetzt es habe das System die lebendige Kraft T_0 und es seien in dem Systeme nur Kräfte, die bei der Bewegung hemmende Arbeit liefern,

und keine, welche fördern, was häufig bei Maschinen der Fall ist, so sind alle Elemente

$$\mathrm{R}\cos\varphi\frac{ds}{dt}\Delta t$$

negativ und es wird das System noch eine Zeit τ in Bewegung bleiben, gerechnet von dem Augenblicke an wo $T = T_0$ war und die hier aufgeführten Verhältnisse stattfinden, gegeben durch die Gleichung

$$0 = T_0 + \Sigma\int_0^{\tau}\mathrm{R}\cos\varphi\,v\,dt, \tag{75}$$

wo natürlich das zweite Glied negativ ist. Alsdann ist nach (74′) $T = 0$, d. h. das ganze System steht nothwendig still und bleibt auch in Ruhe. Denn sollte unter denselben Bedingungen die Bewegung fortdauern, so würde

$$T_0 + \Sigma\int_0^{t}\mathrm{R}\cos\varphi\,v\,dt$$

(d. h. T) negativ werden.

Die verrichtete Arbeit, in dem Sinne dass Widerstand überwunden, ist gleich T_0, so dass also ein System, dessen lebendige Kraft $= T_0$ ist, sich so lange bewegt, bis die verrichtete Arbeit gleich derselben ist.

Aus (74) folgt

$$T = T_0 + \Sigma\int_{\tau}^{t}\mathrm{R}\cos\varphi\,v\,dt - \Sigma\int_{\tau}^{t}S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}dt.$$

Das erste Glied (der zweiten Seite) ist die lebendige Kraft zur Zeit $t = \tau$; das zweite die Arbeit, wenn wir nur widerstehende Arbeit annehmen; soll nun $T = 0$ werden, so muss jetzt

$$T_0 = -\Sigma\int_{\tau}^{t}\mathrm{R}\cos\varphi\,v\,dt + \Sigma\int_{\tau}^{t}S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}dt$$

sein. Daraus folgt, dass in (74)

$$\Sigma\int_{\tau}^{t}S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}dt$$

die Arbeit ist, welche auf die Aenderung der Gestalt der Flächen verwendet wurde.

Fall der Kräftefunktion.

VI. Besteht die Kräftefunktion V (§. 5, V) und sind die Bedingungsgleichungen frei von der Zeit, so ist aus (74′)

$$T - T_0 = \int_{\tau}^{t}\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Aber

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

so dass

$$T-T_0=\int_\tau^t\left(\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}\right)dt=V-V_0-\int_\tau^t\frac{\partial V}{\partial t}dt. \qquad (76)$$

ist, wo V den Werth zur Zeit t, V_0 zur Zeit τ bezeichnet.

Ist V frei von t, so ist

$$T-T_0=V-V_0, \qquad (76')$$

und es ist in diesem Satze das so genannte Prinzip der lebendigen Kräfte ausgesprochen. Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass V eine mit der Zeit sich stetig ändernde Funktion sei.

Reduktion der lebendigen Kraft.

VII. Seien (wie in §. 2) ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems zur Zeit t, bezogen auf dieselben festen Koordinatenaxen, die wir seither immer betrachteten; durch diesen Schwerpunkt legen wir ein mit dem ersten paralleles Koordinatensystem, dessen Anfang hiernach beweglich ist. Seyen x, y, z die Koordinaten des Punktes m für die festen; x', y', z' für die beweglichen Axen. Dann ist

$$x=\xi+x',\ y=\eta+y',\ z=\zeta+z';\ \Sigma m x'=0,\ \Sigma m y'=0,\ \Sigma m z'=0. \qquad (a)$$

Daraus

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}+\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}+\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}+\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\Sigma m\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

da wegen (a)

$$\Sigma m\frac{dx'}{dt}=0,\ \Sigma m\frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt}=\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\frac{dx'}{dt}=0$$

u. s. w.

Ist w die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, so dass

$$w^2=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2; \qquad (b)$$

ist ferner v' die relative Geschwindigkeit des Punktes m in Bezug auf auf den Schwerpunkt, d. h.

$$v'^2=\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2, \qquad (c)$$

so ist

$$2T=Mw^2+\Sigma m v'^2, \qquad (77)$$

wo M die Masse des Systems. [Vergl. §. 9, Glchg (63)].

Die „relative Geschwindigkeit" v′ kann man erklären als die Geschwindigkeit, welche der Punkt m haben würde, wenn man neben seiner eigenen Geschwindigkeit ihm noch die des Schwerpunkts, letztere jedoch in der entgegengesetzten Richtung von der genommen die der Schwerpunkt selbst hat, zutheilen würde. Es ergibt sich diess unmittelbar aus den Formeln

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt},\quad \frac{dz'}{dt}=\frac{dz}{dt}-\frac{d\zeta}{dt},$$

in denen übrigens von der besondern Eigenschaft des Schwerpunkts noch keine Rede ist.

§. 11.

Bewegung eines festen Körpers bei Berücksichtigung der innern Kräfte.

I. Wir wollen uns einen Körper denken, der die Eigenschaften eines starren habe, nur dass seine einzelnen Punkte kleine Schwingungen um ihre Ruhelage* ausführen können, in diese aber sofort zurückkehren, sobald die Schwingungen aufhören. Sonst soll der Körper völlig frei sein.

Aus §. 2 folgt nun sofort, dass der Schwerpunkt des Körpers sich so bewegt, als wenn die innern Kräfte nicht vorhanden wären. Dabei müssen wir aber auf einen Umstand aufmerksam machen. Die Kräfte X, Y, Z in in §. 1, VII können von den Koordinaten des bewegten Punktes abhängen; diese Koordinaten werden durch die innern Schwingungen geändert. Wir setzen nun voraus, dass die (äussern) Kräfte nur von den Koordinaten der Ruhelagen abhängen, was wir schon dürfen, da die Koordinaten der wirklichen Lagen (zur Zeit t) von denen der Ruhelagen nur wenig verschieden sind.

Wir wollen im Raume ein festes Koordinatensystem der x, y, z, uns denken; sodann durch den Schwerpunkt des als starr angesehenen Körpers ein bewegliches legen, das — wenn der Körper starr wäre — das der Hauptaxen wäre. Die Koordinaten eines Punktes des als starr angesehenen Körpers (der Ruhelagen) in Bezug auf diese Axen seien

$$x',\ y',\ z';\quad x'+\alpha,\qquad y'+\beta,\ z'+\gamma$$

die wirklichen Koordinaten zur Zeit t, wo α, β, γ sehr kleine Grössen sind. Die Koordinaten des Schwerpunkts zur Zeit t seien

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\qquad x,\ y,\ z$$

die des Punktes m zur Zeit t, Alles bezogen auf die festen Axen.

* D. h. die Lage im starren Körper.

Dann ist (§. 9, I)

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + a_1 (x' + \alpha) + b_1 (y' + \beta) + c_1 (z' + \gamma), \\ y &= \eta + a_2 (x' + \alpha) + b_2 (y' + \beta) + c_2 (z' + \gamma), \\ z &= \zeta + a_3 (x' + \alpha) + b_3 (y' + \beta) + c_3 (z' + \gamma), \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo

$$a_1, \ldots, c_3$$

dieselbe Bedeutung haben wie in §. 8, I. Zugleich ist (§. 6, II)

$$\Sigma m x' = 0,\ \Sigma m y' = 0,\ \Sigma m z' = 0,\ \Sigma m x' y' = 0,\ \Sigma m x' z' = 0,\ \Sigma m y' z' = 0. \quad (b)$$

Doch ist dabei zunächst wesentlich festzuhalten, dass der hier als Schwerpunkt bezeichnete Punkt nur der Schwerpunkt des als starr angesehenen Körpers ist, und wir erst nachzuweisen haben, dass der wirkliche Schwerpunkt des innerlich bewegten Körpers mit demselben zusammenfällt (III).

Bewegungsgleichungen.

II. Unserer Anschauung nach sind die innern Schwingungen bloss durch die innern Kräfte hervorgerufen. Demgemäss bestehen für jeden Punkt m_r die Gleichungen (§. 1, IX)

$$m_r \frac{d^2 \alpha_r}{dt^2} = - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \alpha_r},\quad m_r \frac{d^2 \beta_r}{dt^2} = - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \beta_r},\quad m_r \frac{d^2 \gamma_r}{dt^2} = - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \gamma_r}. \quad (c)$$

Dabei ist

$$\varrho^2_{r,s} = (x_r' - x_s' + \alpha_r - \alpha_s)^2 + (y_r' - y_s' + \beta_r - \beta_s)^2 + (z_r' - z_s' + \gamma_r - \gamma_s)^2,$$

woraus

$$\begin{aligned} \varrho_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \alpha_r} &= x_r' - x_s' + \alpha_r - \alpha_s = x' + \alpha_r - (x_s' + \alpha_s) \\ &= a_1 (x_r - \xi) + a_2 (y_r - \eta) + a_3 (z_r - \zeta) - [a_1 (x_s - \xi) + a_2 (y_s - \eta) + a_3 (z - \zeta)] \\ &= a_1 (x_r - x_s) + a_2 (y_r - y_s) + a_3 (z_r - z_s). \end{aligned}$$

Da aber auch

$$\varrho^2_{r,s} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2,\quad \varrho_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} = x_r - x_s, \ldots,$$

so ist endlich (ϱ kurzweg für $\varrho_{r,s}$ gesetzt)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} &= a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + a_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + a_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} &= a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} &= b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + b_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + b_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} &= a_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r} &= c_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + c_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + c_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial z_r} &= a_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Weiter ist nach §. 1, IX:

$$\left.\begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r}, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= Y_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= Z_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(e)}$$

Unter Beachtung von (a), (d), (c) folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} m_r \Big[\frac{d^2 \xi}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r)\frac{d^2 a_1}{dt^2} + (y_r' + \beta_r)\frac{d^2 b_1}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r)\frac{d^2 c_1}{dt^2} \\ + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_1}{dt}\right)\Big] = X_r, \\ m_r \Big[\frac{d^2 \eta}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r)\frac{d^2 a_2}{dt^2} + (y_r' + \beta_r)\frac{d^2 b_2}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r)\frac{d^2 c_2}{dt^2} \\ + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_2}{dt}\right)\Big] = Y_r, \\ m_r \Big[\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r)\frac{d^2 a_3}{dt^2} + (y_r' + \beta_r)\frac{d^2 b_3}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r)\frac{d^2 c_3}{dt^2} \\ + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_3}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_3}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_3}{dt}\right)\Big] = Z_r. \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

In diesen Gleichungen darf man α_r, β_r, γ_r neben x_r', y_r', z_r' vernachlässigen, doch wollen wir jene Grössen vorerst noch beibehalten.

Schwerpunkt des bewegten Körpers.

III. Aus den (c) ergibt sich sofort

$$\Sigma m \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0,$$

d. h.

$$\Sigma m \frac{d\alpha}{dt} = C_1, \qquad \Sigma m \frac{d\beta}{dt} = C_2, \qquad \Sigma m \frac{d\gamma}{dt} = C_3;$$

$$\Sigma m\alpha = C_1 t + E_1, \quad \Sigma m\beta = C_2 t + E_2, \quad \Sigma m\gamma = C_3 t + E_3.$$

Nun ist $\Sigma m\alpha$ die Abszisse des wirklichen Schwerpunkts, bezogen auf die beweglichen Axen der x', y', z'. Da derselbe sich — der Annahme nach — nicht unbegränzt weit von dem Schwerpunkt des starren Körpers entfernen kann, so muss nothwendig $C_1 = 0$ sein, weil sonst $\Sigma m\alpha$ mit der Zeit unbegränzt wachsen würde. Demnach ist immer

$$\Sigma m \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\gamma}{dt} = 0, \qquad \text{(f)}$$

und

$$\Sigma m\alpha, \quad \Sigma m\beta, \quad \Sigma m\gamma$$

sind unveränderlich. Fällt also einmal der Schwerpunkt des innerlich bewegten Körpers zusammen mit dem des starren, so ist diess immer so.

Diess dürfen wir aber sicher zu Anfang der Bewegung annehmen,* so dass also immer

$$\Sigma m\alpha = 0,\ \Sigma m\beta = 0,\ \Sigma m\gamma = 0, \qquad \text{(g)}$$

woraus wegen (b)

$$\Sigma m(x' + \alpha) = 0,\ \Sigma m(y' + \beta) = 0,\ \Sigma m(z' + \gamma) = 0. \qquad \text{(g')}$$

Demnach fällt der wirkliche Schwerpunkt mit den in I betrachteten immer zusammen.

Unter Berücksichtigung der (f) und (g) bestimmt sich seine Bewegung aus

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X,\ M\frac{d^2\eta}{dt} = \Sigma Y,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z, \qquad (79)$$

welche Gleichungen aus (78) sich sofort ergeben (§. 2, I). Dabei enthalten die zweiten Seiten die innern Kräfte nicht, und nach der Annahme in I hängen dieselben auch nicht von den durch die innern Bewegungen hervorgebrachten Aenderungen der Koordinaten ab.

Berechnung der lebendigen Kraft.

IV. Aus (a) folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_1}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_1}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_1}{dt} + a_1\frac{d\alpha}{dt} + b_1\frac{d\beta}{dt} + c_1\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_2}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_2}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_2}{dt} + a_2\frac{d\alpha}{dt} + b_2\frac{d\beta}{dt} + c_2\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_3}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_3}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_3}{dt} + a_3\frac{d\alpha}{dt} + b_3\frac{d\beta}{dt} + c_3\frac{d\gamma}{dt}.$$

Mit Berücksichtigung von (b), (f), (g) folgt daraus

$$2T = M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] + \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_1}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_1}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_1}{dt}\right]^2$$
$$+ \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_2}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_2}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_2}{dt}\right]^2$$
$$+ \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_3}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_3}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_3}{dt}\right]^2$$
$$+ \Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ 2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_1}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_1}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_1}{dt}\right]\left[a_1\frac{d\alpha}{dt} + b_1\frac{d\beta}{dt} + c_1\frac{d\gamma}{dt}\right]$$
$$+ 2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_2}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_2}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_2}{dt}\right]\left[a_2\frac{d\alpha}{dt} + b_2\frac{d\beta}{dt} + c_2\frac{d\gamma}{dt}\right]$$

* Wir betrachten hiernach den Anfangszustand als den der Ruhelagen, um die dann die innern Schwingungen vor sich gehen, während der Körper sich im Ganzen fortbewegt.

$$+2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_3}{dt}+(y'+\beta)\frac{db_3}{dt}+(z'+\gamma)\frac{dc_3}{dt}\right]\left[a_3\frac{d\alpha}{dt}+b_3\frac{d\beta}{dt}+c_3\frac{d\gamma}{dt}\right].$$

Wegen der (51), die ohnehin so eben benützt wurden, ist die Summe der drei letzten Glieder*

$$2\left(b_1\frac{da_1}{dt}+b_2\frac{da_2}{dt}+b_3\frac{da_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]$$
$$+2\left(a_1\frac{dc_1}{dt}+a_2\frac{dc_2}{dt}+a_3\frac{dc_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right].$$
$$+2\left(c_1\frac{db_1}{dt}+c_2\frac{db_2}{dt}+c_3\frac{db_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right].$$
$$=2r\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]+2q\Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right]$$
$$+2p\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right],$$

wenn p, q, r die Bedeutung in §. 8, II haben (§. 8, VIII).

Die ersten Seiten der (c) heissen auch

$$m_r\frac{d^2(x_r'+\alpha_r)}{dt^2},\ m_r\frac{d^2(y_r'+\beta_r)}{dt^2},\ m_r\frac{d^2(z_r'+\gamma_r)}{dt^2}.$$

Daraus folgt nach §. 3, II, (18), dass weil die Grössen

$$\Sigma m_r F_r, \ldots$$

nicht unbegränzt wachsen können, sobald wir eine schwingende Bewegung untersuchen:

$$\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]=0,\ \Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right]=0,$$
$$\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right]=0, \qquad \text{(h)}$$

so dass die betreffende Summe Null ist.

Ferner ist in der Summe der drei Quadrate gestattet, α, β, γ neben x', y', z' zu vernachlässigen, d. h. anzunehmen, dass durch die Schwingungen die Lage der wirklichen Hauptaxen, sowie die Werthe der wirklichen Hauptträgheitsmomente unmerklich abweichen von denen für den starren Körper.

Dadurch wird (§. 9, II)

---

* Es folgt aus (51):

$$a_1\frac{db_1}{dt}+a_2\frac{db_2}{dt}+a_3\frac{db_3}{dt}=-\left(b_1\frac{da_1}{dt}+b_2\frac{da_2}{dt}+b_3\frac{da_3}{dt}\right),$$
$$c_1\frac{da_1}{dt}+c_2\frac{da_2}{dt}+c_3\frac{da_3}{dt}=-\left(a_1\frac{dc_1}{dt}+a_2\frac{dc_2}{dt}+a_3\frac{dc_3}{dt}\right),$$
$$b_1\frac{dc_1}{dt}+b_2\frac{dc_2}{dt}+b_3\frac{dc_3}{dt}=-\left(c_1\frac{db_1}{dt}+c_2\frac{db_2}{dt}+c_3\frac{db_3}{dt}\right).$$

$$2T = Mw^2 + \mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 + \Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right], \quad (80)$$

wo w (wie in §. 10, VII) die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist.

Diese Grösse T lässt sich nun aber nicht wie in §. 5, IV benützen, da $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \vartheta$ und die α, β, γ zu viele bestimmende Grössen sind.

Unsere vorhin gemachte Annahme wegen der Hauptträgheitsmomente kommt auf

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta) = 0,$$

u. s. w. hinaus. Daraus würde folgen

$$\Sigma m\left[(y' + \beta)\frac{d\alpha}{dt} + (x' + \alpha)\frac{d\beta}{dt}\right] = 0,\text{*}$$

was in Verbindung mit (h) zu

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m(x' + \alpha)\dfrac{d\beta}{dt} = 0, \ \Sigma m(x' + \alpha)\dfrac{d\gamma}{dt} = 0, \ \Sigma m(y' + \beta)\dfrac{d\alpha}{dt} = 0, \\ \Sigma m(y' + \beta)\dfrac{d\gamma}{dt} = 0, \ \Sigma m(z' + \gamma)\dfrac{d\alpha}{dt} = 0, \ \Sigma m(z' + \gamma)\dfrac{d\beta}{dt} = 0 \end{array}\right\} \quad (i)$$

führt. Auch hier dürfte man α, β, γ neben x', y', z' wohl vernachlässigen.

Berechnung der p, q, r.

V. Die (78) heissen, wenn man α, β, γ vernachlässigt:

$$m\left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + x'\frac{d^2a_1}{dt} + y'\frac{d^2b_1}{dt} + z'\frac{d^2c_1}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_1}{dt}\right)\right] = X,$$

$$m\left[\frac{d^2\eta}{dt^2} + x'\frac{d^2a_2}{dt^2} + y'\frac{d^2b_2}{dt^2} + z'\frac{d^2c_2}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_2}{dt}\right)\right] = Y,$$

$$m\left[\frac{d^2\xi}{dt} + x'\frac{d^2a_3}{dt^2} + y'\frac{d^2b_3}{dt^2} + z'\frac{d^2c_3}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_3}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_3}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_3}{dt}\right)\right] = Z.$$

Man wird nun bemerken, dass die ersten Seiten, wenn man α, β, γ wegliesse, ganz die in den Gleichungen wären, die in §. 9, I für die Bewegung

* Ist diese Grösse nicht $= 0$, sondern gleich μ, wo μ von der Zeit abhängt, so ist

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta) = \int_0^t \mu \, dt,$$

wenn man beachtet, dass im Anfang α und β Null waren, also genau die erste Seite Null. Aber

$$\int_0^t \mu \, dt = t\mu_1,$$

wo μ_1 ein Mittelwerth von μ, so dass weil

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta)$$

gewiss immer klein, auch μ_1 klein (und desto kleiner je grösser t). Da diess für alle t gilt, so folgt daraus, dass μ jedenfalls sehr klein sein muss.

eines Punktes aufzustellen gewesen wären. Daraus kann man schliessen, dass die (64) zum Vorschein kommen werden, und es liessen sich dieselben aus dieser Bemerkung auch finden. Doch wollen wir sie durch unmittelbare Rechnung ableiten.

Zerlegen wir X, Y, Z nach den Axen der x′, y′, z′, so ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen (§. 8, II)

$$\begin{aligned} X' = m\Big[& a_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + a_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\zeta}{\partial t^2} + x'\left(a_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right) \\ & + y'\left(a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right) \\ & + z'\left(a_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) - 2r\frac{d\beta}{dt} \\ & + 2q\frac{d\gamma}{dt}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y' = m\Big[& b_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + b_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + b_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\left(b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 a_2}{dt} + b_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right) \\ & + y'\left(b_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right) \\ & + z'\left(b_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) + 2r\frac{d\alpha}{dt} \\ & - 2p\frac{d\gamma}{dt}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z' = m\Big[& c_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + c_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + c_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\left(c_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right) \\ & + y'\left(c_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right) \\ & + z'\left(c_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) - 2q\frac{d\alpha}{dt} \\ & + 2p\frac{d\beta}{dt}\Big]. \end{aligned}$$

Daraus mit Beachtung von (b), (i):

$$\begin{aligned} \Sigma(x'Y' - y'X') = & \left(b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right) \Sigma m x'^2 \\ & - \left(a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right) \Sigma m y'^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = 0,$$

d. h.

$$a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt_3} + 2\left(\frac{da_1}{dt} + ..\right) + b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \ldots = 0.$$

Weiter aus §. 8, VIII:

$$b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \ldots + \frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots = \frac{dr}{dt},$$

also

$$a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2} = -\frac{dr}{dt} - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{da_2}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{da_3}{dt}\frac{db_3}{dt}\right),$$

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \frac{dr}{dt}\Sigma m(x'^2 + y'^2) - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots\right)\Sigma m(x'^2 - y'^2)$$

$$= \mathfrak{H}\frac{dr}{dt} - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots\right)(\mathfrak{J} - \mathfrak{G}).$$

Aus

$$c_1\frac{db_1}{dt} + c_2\frac{db_2}{dt} + c_3\frac{db_3}{dt} = p,\quad b_1\frac{dc_1}{dt} + b_2\frac{dc_2}{dt} + b_3\frac{dc_3}{dt} = -p,$$

$$a_1\frac{dc_1}{dt} + a_2\frac{dc_2}{dt} + a_3\frac{dc_3}{dt} = q,\quad c_1\frac{da_1}{dt} + c_2\frac{da_2}{dt} + c_3\frac{da_3}{dt} = -q,$$

$$b_1\frac{da_1}{dt} + b_2\frac{da_2}{dt} + b_3\frac{da_3}{dt} = r,\quad a_1\frac{db_1}{dt} + a_2\frac{db_2}{dt} + a_3\frac{db_3}{dt} = -r,$$

$$a_1\frac{da_1}{dt} + a_2\frac{da_2}{dt} + a_3\frac{da_3}{dt} = 0,\quad b_1\frac{db_1}{dt} + b_2\frac{db_2}{dt} + b_3\frac{db_3}{dt} = 0,$$

$$c_1\frac{dc_1}{dt} + c_2\frac{dc_2}{dt} + c_3\frac{dc_3}{dt} = 0,$$

erhält man

$$\left.\begin{array}{lll}\frac{da_1}{dt} = b_1 r - c_1 q, & \frac{da_2}{dt} = b_2 r - c_2 q, & \frac{da_3}{dt} = b_3 r - c_3 q,\\ \frac{db_1}{dt} = c_1 p - a_1 r, & \frac{db_2}{dt} = c_2 p - a_2 r, & \frac{db_3}{dt} = c_3 p - a_3 r,\\ \frac{dc_1}{dt} = a_1 q - b_1 p, & \frac{dc_2}{dt} = a_2 q - b_2 p, & \frac{dc_3}{dt} = a_3 q - b_3 p.\end{array}\right\} \quad (k)$$

Daraus dann sofort

$$\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{da_2}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{da_3}{dt}\frac{db_3}{dt} = -pq,$$

so dass

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \mathfrak{H}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{G} - \mathfrak{J})pq,$$

welches die letzte der (64) ist. Eben so erhält man die übrigen.

Bestimmung der Bewegung.

VI. Aus V ergibt sich nun zur Bestimmung der Bewegung folgende Vorschrift.

Man behandelt den Körper als einen starren im Sinne des §. 9 und bestimmt so seine Lage zur Zeit t, so wie dessen fortschreitende (Schwerpunkts-) Bewegung und seine Drehung. Aus den (c) bestimmt man die Schwingungen ganz unabhängig hievon (§. 14), da die Gesammtbewegung

von diesen Schwingungen unmerklich berührt wird. Alsdann wird man aus der Zusammensetzung beider Bewegungen die eigentliche Bewegung jedes Punktes erhalten.

Die äussern Kräfte bedingen die erste Bewegung, die wir die mittlere nennen wollen; die innern die zweite. Dieses Ergebniss war vorauszusehen, da es in den gemachten Annahmen lag, auch deutet der Ausdruck (79) darauf hin.

Prinzip der lebendigen Kräfte.

VII. Die (74′) in §. 10, IV heisst nun

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{M}\,\mathrm{w}^2+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}\mathrm{p}^2+\mathfrak{B}\mathrm{q}^2+\mathfrak{C}\mathrm{r}^2)+\tfrac{1}{2}\Sigma \mathrm{m}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]-\mathrm{T}_0$$
$$=\Sigma\int_0^t\left(\mathrm{X}\frac{dx}{dt}+\mathrm{Y}\frac{dy}{dt}+\mathrm{Z}\frac{dz}{dt}\right)dt. \qquad (81)$$

Hier sind X, Y, Z die Gesammtkräfte; die x, y, z aber die aus (a) gezogenen, deren Differentialquotienten in IV gegeben sind.

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man auf der zweiten Seite eine Reihe Glieder, die wir einzeln untersuchen wollen.

Es ist

$$\Sigma\left(\mathrm{X}\frac{d\xi}{dt}+\mathrm{Y}\frac{d\eta}{dt}+\mathrm{Z}\frac{d\zeta}{dt}\right)=\Sigma \mathrm{m}\left(\frac{d^2\xi}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{d\eta}{dt}+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\Sigma \mathrm{m}\frac{d\,\mathrm{w}^2}{dt},$$

wie (79) sofort gibt. Also ist der Theil der zweiten Seite in (81), der diesen Gliedern zugehört, gleich $\frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{w}^2-\frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{w}_0{}^2$, so dass man die (81) auch schreiben darf

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}\mathrm{p}^2+\mathfrak{B}\mathrm{q}^2+\mathfrak{C}\mathrm{r}^2)+\tfrac{1}{2}\Sigma \mathrm{m}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\mathrm{C}+\Sigma\int_0^t\left(\mathrm{X}\frac{dx}{dt}+\mathrm{Y}\frac{dy}{dt}+\mathrm{Z}\frac{dz}{dt}\right)dt, \qquad (81')$$

wo C der Werth der ersten Seite für $t=0$ ist und man auf der zweiten Seite ξ, η, ζ weglässt.

Trennt man die innern und äussern Kräfte, so ist für erstere

$$\mathrm{X}_r\frac{dx_r}{dt}+\mathrm{Y}_r\frac{dy_r}{dt}+\mathrm{Z}_r\frac{dz_r}{dt}+\mathrm{X}_s\frac{dx_s}{dt}+\mathrm{Y}_s\frac{dy_s}{dt}+\mathrm{Z}_s\frac{dz_s}{dt}=-\mathrm{f}(\varrho_{r,s})\frac{d\varrho_{r,s}}{dt},$$

wenn $\mathrm{P}_{r,s}=\mathrm{f}(\varrho_{r,s})$ (§. 1, IV): also ist der hievon herrührende Theil

$$-\Sigma\int_0^t \mathrm{f}(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}dt=-\Sigma\int_{\varrho_0}^{\varrho}\mathrm{f}(\varrho)\,d\varrho,$$

wo die Summirung auf alle verschiedenen Verbindungen je zweier Punkte

auszudehnen ist (und die letzte Form des Integrals verlangt, dass $f(\varrho)$ immer wieder denselben Werth annimmt, wenn ϱ dasselbe geworden).

Aus den (c) folgt aber

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]=-\Sigma f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt},$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]+c=-\Sigma\int_0^t f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}dt,$$

so dass die (81′) ist

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2)=C+\int_0^t\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt, \qquad (81'')$$

wenn man hier nur die äussern Kräfte berücksichtigt, und in x, y, z die Schwerpunktskoordinaten wegbleiben. C ist der Werth der ersten Seite für $t=0$. Zerlegt man X, Y, Z nach den Axen der x', y', z', so ist

$$\begin{aligned}X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=&(a_1X'+b_1Y'+c_1Z')\Big(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}+a_1\frac{d\alpha}{dt}\\&\qquad+b_1\frac{d\beta}{dt}+c_1\frac{d\gamma}{dt}\Big)\\&+(a_2X'+b_2Y'+c_2Z')\Big(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}+a_2\frac{d\alpha}{dt}\\&\qquad+b_2\frac{d\beta}{dt}+c_2\frac{d\gamma}{dt}\Big)\\&+(a_3X'+b_3Y'+c_3Z')\Big(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}+a_3\frac{d\alpha}{dt}\\&\qquad+b_3\frac{d\beta}{dt}+c_3\frac{d\gamma}{dt}\Big)\\=&\,r(x'Y'-y'X')+q(z'X'-y'Z')+p(y'Z'-z'Y')\\&+X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt},\end{aligned}$$

also wegen der (64):

$$\begin{aligned}\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=&\,r[\mathfrak{C}\frac{dr}{dt}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})pq]+q[\mathfrak{B}\frac{dq}{dt}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})pr]\\&+p[\mathfrak{A}\frac{dp}{dt}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})qr]+\Sigma\left[X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt=&\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}r^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{A}p^2)-C\\&+\int_0^t\Sigma\left(X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right)dt,\end{aligned}$$

so dass in (81″):

$$0=\int_0^t\Sigma\left(X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right)dt, \qquad (m)$$

d. h. diese Grösse von der Gattung derer ist, die wir hier vernachlässigen.

VIII. Nach den vorstehenden Untersuchungen trennt sich die Gesammtarbeit

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

in drei Theile:

1) die Arbeit der äussern Kräfte während der mittlern Bewegung, wobei von den Schwingungen ganz abzusehen, der Körper also nach §. 9 zu behandeln ist;

2) die Arbeit der äussern Kräfte während der Schwingungen, welche in (m) vorkommt, hier aber unmerklich ist;

3) die Arbeit der innern Kräfte während der Schwingungen, welche gleich

$$-\Sigma\int_0^t f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}dt$$

ist.

Der in 1) angegebene Werth ist allerdings nur eine Näherung, wie denn überhaupt die ganze Untersuchung auf die wesentliche Bedingung **sehr kleiner** Schwingungen gegründet ist.

Sind die hier gemachten Annahmen zulässig, so folgt aus den Untersuchungen in VII offenbar, dass man die **Gleichung** (74′) **der lebendigen Kräfte auch zulassen kann, wenn man von den innern Bewegungen ganz absieht** und nur die mittlere Bewegung beachtet, trotzdem dass diese innern Bewegungen bestehen.

Es geht diess aus (81″) hervor. Denn wegen (m) kann man auf der zweiten Seite jener Gleichung ganz wohl α, β, γ ganz unbeachtet lassen. Lässt man also dort α, β, γ weg, fügt aber den x, y, z die Schwerpunktskoordinaten bei, so ist nunmehr

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt + C = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2) + \int_0^t \Sigma\left(X\frac{d\xi}{dt}+Y\frac{d\eta}{dt}+Z\frac{d\zeta}{dt}\right)dt,$$

d. h.

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt + C = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2) + \tfrac{1}{2}Mw^2 - \tfrac{1}{2}Mw_0^2,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}Mw^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2) = C' + \int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt, \quad (82)$$

wo auf der zweiten Seite nur die äussern Kräfte beachtet und x, y, z durch die Formeln (a) des §. 9, I gegeben sind. Dabei ist C′ der Werth der ersten Seite für $t=0$. Die (82) enthält den ausgesprochenen Satz, sie ist nämlich die (74′) unter der Annahme eines starren Körpers.

Arbeitsfähigkeit.

IX. Bei dem so eben erhaltenen Ergebnisse ist jedoch wesentlich zu beachten, dass C′ nicht die ganze dem System anfänglich mitgetheilte lebendige Kraft ist, da C′ eben bloss der Werth der ersten Seite für $t = 0$ ist. Diese ganze anfängliche lebendige Kraft ist T_0 in (81) und enthält in sich auch den Anfangswerth von

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right].$$

Theilt man also dem Systeme anfänglich eine gewisse lebendige Kraft mit, so wird ein Theil derselben dazu verwendet, innere Schwingungen hervorzurufen, während der andere die mittlere Bewegung erzeugt. Jener erste Theil ist thatsächlich wohl immer klein, und wird also auch nur dann von merklichem Einfluss werden, wenn überhaupt T_0 klein ist.

Würden die Körperpunkte schliesslich zur Ruhe gelangen, so würde immerhin auch der in ihnen enthaltene Theil verwendet sein (§. 10, V). Allein es ist diess nicht der Fall, d. h. es ist dieser Theil nicht zur Arbeit im gewöhnlichen Sinne verwendet, weil entweder die Schwingungen noch fortdauern auch wenn die mittlere Bewegung zu Ende ist, oder weil jene lebendige Kraft der Schwingungen sich den Aetherpunkten mittheilt, dort in den Erscheinungen der Wärme u. s. w. sich offenbart und so die schwingende Bewegung der Körperpunkte wohl aufhören kann, ohne dass die lebendige Kraft derselben zur Arbeit im frühern Sinne verwendet wurde. Verloren freilich geht diese lebendige Kraft nicht, wie überhaupt Nichts verloren geht, sondern sich nur umwandelt.

§. 12.

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

I. An die Untersuchungen des §. 10 schliesst sich ganz unmittelbar der genaue Ausdruck des unter dem Namen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bekannten allgemeinen Satzes an. Wir haben von diesem Satze bereits in §. 1, VIII schon Gebrauch gemacht, allerdings in der dort geeigneten besondern Form, wollen aber hier näher auf denselben eingehen. Er wird sonst freilich an die Spitze der Mechanik gestellt; sein eigentlicher Ausdruck scheint uns jedoch erst durch die Feststellung des Begriffs der lebendigen Kraft darstellbar.

Wirkt auf ein System von Punkten ein System von Kräften, gleichgiltig welcher Art, ein und sind die Seitenkräfte der auf m_r wirkenden (Gesammt-) Kraft X_r, Y_r, Z_r, so sollen die Bedingungen aufgestellt werden, denen diese Kräfte genügen müssen, damit in dem Systeme selbst keine Bewegung eintrete, d. h. also dass jeder Punkt für

sich in Ruhe bleibe, wenn er es natürlich vorher schon ist, ehe die Kräfte zu wirken anfangen. Man sagt dann, es seien die Kräfte des Systems mit einander im Gleichgewicht.

Soll aber Ruhe in dem materiellen Systeme herrschen, so muss die Geschwindigkeit v_r jedes Punktes m_r Null sein. Man könnte nun unmittelbar untersuchen, indem man von den allgemeinen Gleichungen der Bewegung ausgienge, ob diess der Fall ist, und es würden sich dann die fraglichen Bedingungen ergeben müssen. Man kann aber auch anders verfahren, indem man untersucht ob die Grösse

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_r v_r^2 \quad \text{(a)}$$

zu aller Zeit unter dem Einflusse der hier gedachten Kräfte Null ist. Sobald diess der Fall ist, müssen alle v_r nothwendig Null sein. Die Grösse T, die in unsern sämmtlichen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, haben wir zu bilden gelehrt, und es ist daher für uns weit bequemer, diesen Weg einzuschlagen.

II. Statt nun aber zu untersuchen, ob die Gleichung

$$T = 0 \quad (83)$$

erfüllt ist, wollen wir (wie in §. 1, VIII) untersuchen, ob

$$\frac{dT}{dt} = 0, \text{ d. h. } \Sigma m_r v_r \frac{dv_r}{dt} = 0 \quad (84)$$

ist. Ist diess der Fall, so ist T konstant, und wenn dann nur zu Anfang der Zeit $T = 0$ ist, so ist die (83) immer erfüllt (d. h. T_0 soll $= 0$ sein).

Das Kräftesystem nehmen wir selbstverständlich als vollkommen unveränderlich an, da wir eben dieses System prüfen wollen in Bezug auf den möglichen Gleichgewichtszustand; wir werden die Kräfte also völlig als von der Zeit unabhängig uns denken (was um so mehr einleuchtend ist, als eben keine Bewegung erfolgen soll, also auch die Koordinaten der Punkte sich nicht ändern, wenn das fragliche Kräftesystem allein wirkt).

Die Gleichung (83) ist für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend. Ist sie nicht erfüllt, so sind auch nicht alle v_r Null, d. h. ist nicht allgemein Ruhe; ist sie erfüllt, so sind nothwendig alle v_r Null, ist also wirklich Ruhe im System. Statt der (83) kann die (84) eintreten, mit der dort beigefügten Bedingung.

Bedeutung der (84).

III. Wie so eben gezeigt, muss für das Gleichgewicht unter dem Einfluss der hier betrachteten Kräfte nothwendig die (84) erfüllt sein. * Wir

* Ist (84) erfüllt und $T_0 = 0$, so ist (83) richtig, und umgekehrt wenn (83) richtig ist, so folgt (84) daraus. Ist also (83) nothwendig und hinreichend, so ist auch (84) mit der Bedingung $T_0 = 0$ ebenfalls nothwendig und hinreichend.

haben also hier bloss die Bedeutung dieser Gleichung näher in's Auge zu fassen, um den gesuchten Satz, d. h. den Ausdruck des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden.

Wir dürfen natürlich nicht kurzweg annehmen, die gegebenen Kräfte halten das System in Ruhe, da wir sonst keine weitere Untersuchung mehr zu führen haben. Wir wollen uns also denken, es wäre unter dem Einfluss dieser unveränderlich bleibenden Kräfte eine Bewegung eingetreten. Diese könnte selbstverständlich nur mit Erfüllung aller Bedingungen, denen das Punktsystem etwa unterworfen ist (§. 1, III), erfolgen und gedacht werden.

Beim Beginn dieser Bewegung können wir offenbar $v_r = 0$ setzen, da wir ganz nothwendig voraussetzen müssen, dass die Punkte keine Bewegung haben und eine solche erst unter dem Einfluss der fraglichen Kräfte erlangen können. Demnach ist $T_0 = 0$, und es bleibt bloss die (84) zu untersuchen.

Sei nun die Zeit t von diesem Anfange her verflossen und dann x_r, y_r, z_r die Koordinaten des Punktes m_r, so dass (§. 1, I):

$$m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y_r, \quad m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z_r.$$

Hieraus folgt (§. 10, I)

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{dx_r}{dt} + Y_r \frac{dy_r}{dt} + Z_r \frac{dz_r}{dt}\right),$$

so dass die (84) auch heisst

$$\Sigma\left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) = 0 \qquad (84')$$

Nach §. 10, I fallen in dieser Gleichung die Kräfte, die mit S_e (§. I, IX) zusammenhängen, ganz weg, da u_e mit der Zeit als unveränderlich,* also $\frac{\partial u_e}{\partial t}$ als gleich Null muss betrachtet werden; es enthält also (84') nur die äussern (und etwa auch innern) Kräfte, nie aber die Drucke auf Flächen.

Gemäss §. 10, II heisst die (84') auch

$$\Sigma R \cos\varphi \frac{ds}{dt} = 0 \qquad (84'')$$

und da

$$R \cos\varphi \frac{ds}{dt}$$

(wo

---

* Wir betrachten ja das System in Bezug auf sein Gleichgewicht gerade in dem Stande, in dem es sich jetzt befindet, so dass Bedingungen und Kräfte sich nicht ändern dürfen, ohne dass man etwas Anderes zu untersuchen hätte.

$$R \cos\varphi$$

ganz wohl als unveränderlich angesehen werden kann) gleich ist dem Werthe von

$$R \cos\varphi \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

für ein unendlich kleines Δt, die (84″) also jedenfalls erfüllt ist, wenn für ein solches Δt kurzweg

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s = 0,$$

so kann man also (§. 10, III) sagen, dass wenn für ein unendlich kleines Δt

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s = 0, \qquad (85)$$

gewiss die (84″) auch erfüllt ist. Die (85) muss aber für ein solches Δt (und also auch Δs) genau erfüllt sein, also nicht bloss etwa

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s$$

unendlich klein sein, da sonst keineswegs die (84″) daraus folgt.

Darnach also ersetzt (85) die (84) und der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten heisst:

Soll ein System materieller Punkte unter dem Einfluss bestimmter Kräfte im Gleichgewicht sein, so muss bei einer mit allen Bedingungen des Systems verträglichen, als möglich gedachten und in unendlich kleiner Zeit ausgeführten Bewegung die Gesammtarbeit dieser Kräfte Null sein. (Genauer gesprochen, das Verhältniss dieser Arbeit zum Zeitelemente muss Null sein.) Auf diese Weise entsteht nie Arbeit, also nie lebendige Kraft (§. 10, IV), bleibt also das System vollständig in Ruhe, sonst nicht.

Kräfte im Gleichgewicht, in Verbindung mit andern.

IV. Auf den Punkt m_r wirke die Kraft R_r, deren Seitenkräfte X_r, Y_r, Z_r seien, und die Kraft S_r, deren Seitenkräfte U_r, V_r, W_r sein mögen. Die Kräfte S sollen für sich das System im Gleichgewicht halten, so dass

$$\Sigma\left(U_r \frac{dx_r}{dt} + V_r \frac{dy_r}{dt} + W_r \frac{dz_r}{dt}\right) = 0. \qquad (b)$$

Man hat nun (§. 1)

$$m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r + U_r, \; m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y_r + V_r, \; m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z_r + W_r. \qquad (c)$$

Aus (c) folgt (§. 10, I)

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{dx_r}{dt} + Y_r \frac{dy_r}{dt} + Z \frac{dz_r}{dt}\right) + \Sigma\left(U_r \frac{dx_r}{dt} + V_r \frac{dy_r}{dt} + W \frac{dz_r}{dt}\right),$$

d. h. wegen (c):

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{dx_r}{dt} + Y_r \frac{dy_r}{dt} + Z_r \frac{dz_r}{dt}\right). \qquad (d)$$

Aus (d) folgt sofort, dass die Kräfte, welche für sich ein System im Gleichgewichte halten, auf den Werth der lebendigen Kraft, d. h. also auf die etwa vorhandene Bewegung des Punktsystems keinerlei Einfluss üben. Diess war nach I und §. 10, III sofort zu erwarten.

Gleichgewichtsbedingungen in besondern Fällen.

V. Die Gleichung (83) drückt unbedingt den Zustand der Ruhe aus, enthält also die Bedingungen des Gleichgewichts unter dem Einflusse bestimmter Kräfte.

Ist aber $T = 0$, so folgt aus den (31) in §. 5, dass nothwendig auch

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots,\ Q_k = 0, \tag{86}$$

und umgekehrt, wenn die (86) erfüllt sind, ist nothwendig auch (83) erfüllt. Denn dann ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_1} = 0,\ \ldots\ldots,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = 0, \tag{e}$$

wo T nur

$$\xi_1, \ldots \xi_k\ \xi_1', \ldots, \xi_k'$$

und kein t enthält.

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit ξ_1', ..., die letzte mit ξ_k' und addirt, so ist

$$\xi_1' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) + \ldots + \xi_k' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \left[\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \ldots + \xi_k' \frac{\partial T}{\partial \xi_k}\right] = 0,$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k' \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \left(\xi_1'' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k'' \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right)$$

$$- \left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \ldots + \xi_k' \frac{\partial T}{\partial \xi_k}\right) = 0,$$

oder (§. 5, IX)

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = 0,\ \frac{dT}{dt} = 0,$$

und da auch $T_0 = 0$, indem wir dem System keine Anfangsbewegung mittheilen, so ist (84), also auch (83) erfüllt.

Die (86) sind also nothwendig und hinreichend. Sie leiten sich übrigens sofort aus (84') ab. Denn es lassen sich, ohne weitere Bedingung, alle x, y, z durch

$$\xi_1, \ldots\ldots, \xi_k$$

ausdrücken (§. 5, I), so dass

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \xi_1}+Y\frac{\partial y}{\partial \xi_1}+Z\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)\frac{d\xi_1}{dt}+\ldots$$
$$+\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \xi_k}+Y\frac{\partial y}{\partial \xi_k}+Z\frac{\partial z}{\partial \xi_k}\right)\frac{d\xi_k}{dt}=Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+\ldots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}.$$

Demnach muss

$$Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+Q_2\frac{d\xi_2}{dt}+\ldots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}=0 \qquad \text{(f)}$$

sein, was nichts Anderes als die (84′) ist. Soll nun Ruhe herrschen, so muss eine Bestimmung der ξ überhaupt nicht angehen, d. h. die (f) muss identisch erfüllt sein, ohne dass wir annehmen, es seien

$$\frac{d\xi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\xi_k}{dt}$$

Null. Diess ist aber nur möglich wenn die (86) erfüllt sind. Aber auch nur dann ist unbedingt die (84) erfüllt, da sonst eben

$$\frac{dT}{dt}=Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+\ldots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}, \qquad \text{(g)}$$

und also wenn (86) nicht richtig, jedenfalls in (g) auf der zweiten Seite Glieder stehen bleiben, die gedachte Bewegung (III) also wirklich stattfindet.

Die (86) kann man hiernach auch ansehen als die Bedingungsgleichungen, die ausdrücken dass die k bestimmenden Elemente (§. 5, I) unverändert bleiben, also überhaupt der ganze Zustand sich nicht ändert.

Gleichgewicht eines Punktes.

Nach §. 1, I sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Ruhe eines einzigen freien Punktes

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0, \qquad \text{(h)}$$

Gleichgewicht eines starren Körpers, der sich um die z Axe drehen kann.

Nach §. 7, I ist die einzige Bedingung

$$\Sigma(xY-yX)=0, \qquad \text{(i)}$$

und die dortigen (h) und (i), in denen

$$\frac{d\omega}{dt}=0$$

gesetzt wird, geben den Druck auf die feste Axe.

Gleichgewicht eines starren Körpers, der einen festen Punkt enthält.

Nach §. 8, II sind die Gleichgewichtsbedingungen, wenn die dortigen Bezeichnungen gewählt werden:

$$Q_1 = 0, \; Q_2 = 0, \; Q_3 = 0,$$

oder, wie sich leicht daraus findet

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = 0, \; \Sigma(z'X' - x'Z') = 0, \; \Sigma(y'Z' - z'Y') = 0, \quad \text{(k)}$$

aus welchen Gleichungen sich übrigens auch ergibt

$$\Sigma(xY - yX) = 0, \; \Sigma(zX - xZ) = 0, \; \Sigma(yZ - zX) = 0. \quad \text{(k')}$$

Den Druck auf den Punkt bestimmen die dortigen (61), wenn

$$p = q = r = 0$$

gesetzt wird.

Gleichgewicht eines starren völlig freien Körpers.

Aus §. 9, II ergibt sich, wenn man die dortigen sechs Q Null setzt:

$$\Sigma X = 0, \; \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z = 0, \; \Sigma(x'Y' - y'X') = 0, \; \Sigma(z'X' - x'Z') = 0,$$
$$\Sigma(y'Z' - z'Y') = 0. \quad \text{(l)}$$

Dabei ist allerdings der Schwerpunkt als bestimmter Punkt gewählt und die Hauptaxen als Axen der x', y', z'. Doch hat diess auf die Berechnung der Q keinerlei Einfluss geübt, so dass wir als bestimmten Punkt einen ganz beliebigen mit dem Körper verbundenen Punkt nehmen können und auch die Axen der x', y', z' beliebig sein können, ohne dass die dortigen (a) sich ändern.

Da

$$x' = a_1(x - \xi) + a_2(y - \eta) + a_3(z - \zeta), \; y' = b_1(x - \xi) + b_2(y - \eta) + c_3(z - \zeta),$$

so ist

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \Sigma\left[(a_1(x - \xi) + a_2(y - \eta) + a_3(z - \zeta))(b_1X + b_2Y + b_3Z)\right.$$
$$\left. - (b_1(x - \xi) + b_2(y - \eta) + b_3(z - \zeta))(a_1X + a_2Y + a_3Z)\right]$$
$$= c_3\Sigma(xY - yX) + c_2\Sigma(zX - xZ) + c_1\Sigma(yZ - zY)$$
$$- \Sigma(a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1X + b_2Y + b_3Z) + \Sigma(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta)(a_1X + a_2Y + a_3Z),$$

wo die zwei letzten Summen, wegen

$$\Sigma X = 0, \; \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z = 0$$

Null sind. Daraus ergibt sich offenbar, dass die Gleichgewichtsbedingungen (l) auch heissen können:

$$\Sigma X = 0, \; \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z = 0, \; \Sigma(xY - yX) = 0, \; \Sigma(zX - xZ) = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0. \quad \text{(l')}$$

Gleichgewichtslagen eines bewegten Systems.

VI. Ist ein bewegtes System unter dem Einfluss beliebiger Kräfte und befindet sich dasselbe zur Zeit t in einer Lage, in welcher für den nächsten (unendlich kleinen) Zeitaugenblick Δt die Kräfte keine (Gesammt-) Arbeit verrichten, so befindet sich das System in einer Gleichgewichtslage.

Alsdann ist, aber auch nur für diesen Augenblick,

$$\frac{dT}{dt} = 0. \tag{87}$$

Aus (87) folgt, dass in einer solchen Gleichgewichtslage T ein Maximum oder ein Minimum sein kann; doch ist es auch denkbar, dass keines von beiden stattfindet.

Wir wollen den Fall etwas näher betrachten, da T ein Maximum ist, allerdings unter der Voraussetzung des §. 10, VI, da eine Kräftefunktion V besteht, die t nicht entwickelt enthält, und die Bedingungsgleichungen eben so frei von t sind, also die (76′) besteht.

Schwingungen um die Gleichgewichtslage, für die T ein Maximum.

VII. Es bestehe die Gleichung (76′) des §. 10, nämlich

$$T = T_0 + V - V_0 \tag{m}$$

und es sei für die Werthe der ξ (§. 5, IV) die in (m) vorkommen, V ein Maximum. Alsdann ist für diese Werthe V grösser als für Werthe der ξ, die unmittelbar an denselben liegen. Bringt man also das System in eine Lage, in der die ξ nahezu die Werthe haben, wie sie dem Maximum von V entsprechen, und stellt es dort in den Zustand der Ruhe, so wird es unter dem Einfluss der wirksamen Kräfte nothwendig gegen die Lage sich hinbewegen, in der das Maximum von V stattfindet. Denn jetzt ist $T_0 = 0$, also $T = V - V_0$, mithin da $T > 0$, nothwendig $V > V_0$, d. h. es muss V wachsen, also gegen sein Maximum hin gehen.

Ist dagegen V ein Minimum und man bringt das System in eine unmittelbar nahe Lage, so muss, eben weil V wächst (wenigstens anfänglich), das System sich von jener Gleichgewichtslage entfernen.

Es lässt sich nun aber zeigen, dass im ersten Falle, d. h. da man das System einer Gleichgewichtslage mit Maximum von V sehr nahe brachte, und demselben keine Anfangsgeschwindigkeiten ertheilte, immer die Bewegung um diese Gleichgewichtslage herum stattfinden werde, d. h. dass die ξ überhaupt niemals Werthe erhalten werden, die sich über gewisse Gränzen hinaus von denen entfernen, für die V ein Maximum ist.

Seien

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

(wo

$$k = 3n - m,$$

wenn wir die Bezeichnungen des §. 5 gebrauchen) die Werthe von

$$\xi_1, \ldots, \xi_k,$$

für die V ein Maximum und A der Werth dieses Maximums. Alsdann ist nothwendig für Werthe der ξ, die wenig von den α abweichen, der Werth von

V kleiner als A, so dass für ξ innerhalb der Gränzen $\alpha \pm \delta$, wo δ klein sein kann, immer $V - A < 0$. Werden nun die anfänglichen Werthe der ξ innerhalb der Gränzen genommen, in denen $V - A < 0$, wobei diese ξ sehr wenig von den α verschieden sein sollen, so muss wie wir gesehen das System gegen die Gleichgewichtslage sich hinbewegen. In (m) d. h.

$$T = V - V_0 \tag{n}$$

ist $V_0 < A$ und weil $T > 0$ auch $V > V_0$. Demgemäss wir T anfänglich wachsen, kann aber höchstens den Werth von $A - V_0$ erreichen, da V höchstens $= A$ wird, und wird von da an wieder abnehmen. Es ist dabei auch denkbar, dass der grösste Werth nicht erreicht wird, sondern das Abnehmen schon früher beginnt. Unter V_0 kann aber V nie sinken, da sonst $T < 0$ würde, was unmöglich ist. Da nun V_0 nicht der kleinste Werth sein wird, der in der Nähe des Maximums unter den Werthen von V stattfindet (bis nämlich wieder das Wachsen in V beginnt, also ein Minimum eingetreten ist) so werden also auch die ξ sich nie so weit von den α entfernen können, dass die angedeuteten Gränzen überschritten würden.

Dass dieser Beweis nur für das Maximum gilt, ist klar. Eben so aber lässt er sich auch auf den Fall ausdehnen, da Anfangsgeschwindigkeiten vorkommen, nur muss dann, weil die (m) heisst,

$$T = V - (V_0 - T_0),$$

$V_0 - T_0$ noch über dem kleinsten Werthe sein, den V in der Nähe des Maximus hat (d. h. über dem nächsten Minimum).

§. 13.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Dieses so genannte Prinzip ist weiter Nichts als eine Umschreibung der Formeln (33). Nimmt man die Voraussetzungen an, die zu diesen Gleichungen geführt, so ist die Grösse

$$\int_{\tau}^{\tau'} (T + V)\, dt, \tag{88}$$

worin τ und τ' $(> \tau)$ zwei bestimmte Zeitpunkte sind, in denen ξ und $\frac{d\xi}{dt}$ bestimmte unveränderliche Werthe haben, im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum.

Denn schreibt man nach den Regeln der Variationsrechnung die Bedingungen an, unter denen (88) ein solches Maximum oder Minimum sein kann, so erkält man kurzweg die (33). Doch sind diese Bedingungen dieselben für ein Maximum oder ein Minimum, und es ist also keineswegs entschieden, dass (88) gerade ein Minimum sei, wie dieses „Prinzip" ausspricht.

Als eine blosse Nachhilfe für das Gedächtniss mag man demselben

einen Werth beilegen; für die Mechanik dürfte es füglich der Vergessenheit anheimfallen.

§. 14.

Kleine Schwingungen eines Systems.

I. Angenommen das System materieller Punkte sei in einer gewissen Lage in einer der Gewichtslagen, der es bei der Entfernung aus derselben von selbst wieder zustrebe (§. 12, VI) und es mache um dieselbe nur sehr kleine Schwingungen.

Seien die Werthe der ξ in §. 5, V für die Gleichgewichtslage durch a bezeichnet, und im Zustande der Bewegung zur Zeit t

$$\xi = a + \alpha, \qquad \text{(a)}$$

wo immer α sehr klein sei. Aus (a) folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

und es ist selbst $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ als klein anzunehmen, da hier überhaupt keine bedeutenden Kräfte auftreten.

Die Grösse T in §. 5 ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots\right)^2 + \ldots\right].$$

Entwickelt man nun x (nach dem Taylor'schen Satze) nach aufsteigenden Potenzen von α, so wird man diejenigen Potenzen, die die erste übersteigen, vernachlässigen können. Diess kommt offenbar darauf hinaus, die Grössen

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

als konstant zu behandeln. * Demnach erscheint T unter der Form

$$\Sigma\Sigma A_{i,k}\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt}, \qquad \text{(b)}$$

wo die Summenzeichen sich auf i und k beziehen, und diese Grössen alle Werthe durchlaufen von 1 bis m, wo m die Zahl der α ist.

Wir setzen hier eine Kräftefunktion V voraus, welche t nicht entwickelt enthalte, sondern bloss die ξ also $a + \alpha$. Alsdann gilt die (76′) in §. 10, da wir auch die Bedingungsgleichungen frei von der Zeit denken. Ueberdiess ist aber für $\alpha = 0$ auch V ein Maximum (§. 12, VI) und also

---

* Sind die ξ selbst die x, y, z, wie diess meistens der Fall ist, so ist die Sache freilich unmittelbar klar, da dann $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1$ u. s. w.

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \text{ für } \alpha = 0. \qquad (c)$$

Daraus folgt, dass wenn man wieder nach Potenzen von α entwickelt, in dieser Entwicklung für V die ersten Potenzen von α von selbst wegfallen, so dass wenn man sich auf die Glieder zweiter Ordnung einschränkt

$$V = B + \Sigma\Sigma C_{i,k}\alpha_i\alpha_k \qquad (d)$$

sein wird. Nach §. 5, V folgt aus (b) und (d), dass die m Gleichungen der Bewegung sein werden:

$$\Sigma A_{i,1}\frac{d^2\alpha_i}{dt^2} - \Sigma C_{i,1}\alpha_i = 0, \; \ldots\ldots, \; \Sigma A_{i,m}\frac{d^2\alpha_i}{dt^2} - \Sigma C_{i,m}\alpha_i = 0, \qquad (89)$$

wo das Summenzeichen sich auf $i = 1, 2, \ldots, m$ erstreckt. * Dabei ist, wie aus der Bildung von (b) und (d) sofort hervorgeht

$$A_{i,k} = A_{k,i}, \; C_{i,k} = C_{k,i}. \qquad (e)$$

Die (89) haben einzeln die Form (die h^{te}):

$$A_{1,h}\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + A_{2,h}\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \ldots + A_{m,h}\frac{d^2\alpha_m}{dt^2} = C_{1,h}\alpha_1 + C_{2,h}\alpha_2 + \ldots + C_{m,h}\alpha_m. \qquad (f)$$

Integration der (89).

II. Diese Gleichungen haben die lineare Form und es wird ihnen genügt durch

---

* Was (b) anbelangt, so ist diese Grösse, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$:

$$\begin{aligned} &A_{1,1}\,\alpha_1'\,\alpha_1' + A_{1,2}\,\alpha_1'\,\alpha_2' + \ldots A_{1,m}\,\alpha_1'\,\alpha_m' \\ &+ A_{2,1}\,\alpha_2'\,\alpha_1' + A_{2,2}\,\alpha_2'\,\alpha_2' + \ldots A_{2,m}\,\alpha_2'\,\alpha_m' \\ &+ \ldots \\ &\vdots \\ &+ A_{m,1}\,\alpha_m'\,\alpha_1' + A_{m,2}\,\alpha_m'\,\alpha_2' + \ldots A_{m,m}\,\alpha_m'\,\alpha_m'. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'_h} = A_{1,h}\,\alpha_1' + A_{2,h}\,\alpha_2' + \ldots + A_{m,h}\,\alpha_m' + A_{h,1}\,\alpha_1' + A_{h,2}\,\alpha_2' + \ldots + A_{h,m}\,\alpha_m',$$

wenn man beachtet, dass α_h' in der h^{ten} Vertikal- und der h^{ten} Horizontalreihe ausschliesslich vorkommt. Wegen der (e) ist diess

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_h'} = 2\,\Sigma_i\,A_{i,h}\,\alpha_i'.$$

ferner ist $\frac{\partial T}{\partial \alpha_h} = 0$, und ganz eben so

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_h} = 2\,\Sigma_i\,C_{i,h}\,\alpha_i,$$

woraus dann die (89) nach (33) sich ergeben. Es ist übrigens

$$A_{i,h} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x}{\partial \alpha_h} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y}{\partial \alpha_h} + \frac{\partial z}{\partial \alpha_i}\frac{\partial z}{\partial \alpha_h}\right], \quad C_{i,h} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i\,\partial \xi_h} \text{ (für } \xi_i = a_i,\; \xi_h = a_h\text{)},$$

woraus sich die (e) sofort als richtig ergeben.

$$\alpha_i = E_i \sin(p\,t + q), \qquad \text{(g)}$$

wo p und q Konstanten sind, die sich mit i nicht ändern. Dann muss

$$\Sigma A_{i,1}\, p^2 E_i + \Sigma C_{i,1}\, E_i = 0\,,\ \ldots,\ \Sigma A_{i,m}\, p^2 E_i + \Sigma C_{i,m}\, E_i = 0 \qquad \text{(h)}$$

sein. Diese m Gleichungen bestimmen aber, bei ihrer besondern Form, die m Grössen $E_1, \ldots, E_m$ nicht, sondern nur $m - 1$ derselben durch die letzte, die ganz willkürlich bleibt. Man kann desshalb allen E einen willkürlichen Faktor beilegen und den andern Faktor als bestimmt ansehen, d. h. setzen

$$\alpha_i\, E\, b_i \sin(p\,t + q)\,, \qquad \text{(g')}$$

wo E von i unabhängig, b_i als bestimmt anzusehen ist aus dem Systeme

$$\Sigma A_{i,1}\, p^2 b_i + \Sigma C_{i,1}\, b_i = 0\,,\ \ldots\ldots,\ \Sigma A_{i,m}\, p^2 b_i + \Sigma C_{i,m}\, b_i = 0\,, \qquad \text{(h')}$$

in welchem ein b als beliebig aber bestimmt angenommen ist.

Die (h) liefern, wenn man die $E_1, \ldots, E_m$ eliminirt, eine Gleichung m^{ten} Grades für p^2, welche in der Form der Determinanten ausgedrückt (vergl. etwa meine Diff.- u. Intglrchg, Anhang, 𝔐, V) heisst

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}\, p^2 + C_{1,1}\,, & A_{2,1}\, p^2 + C_{2,1}\,, & \ldots\ldots, & A_{m,1}\, p^2 + C_{m,1} \\ A_{1,2}\, p^2 + C_{1,2}\,, & A_{2,2}\, p^2 + C_{2,2}\,, & \ldots\ldots, & A_{m,2}\, p^2 + C_{m,2} \\ \vdots & & & \\ A_{1,m}\, p^2 + C_{1,m}\,, & A_{2,m}\, p^2 + C_{2,m}\,, & \ldots\ldots, & A_{m,m}\, p^2 + C_{m,m} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(i)}$$

Diese Gleichung wird, wenn wir von einer Maximums-Gleichgewichtslage (§. 12, VI) ausgiengen, für p^2 nur reelle und positive Werthe liefern, da sonst die p in (g) imaginär wären und die Sinus sich in Exponentialgrössen verwandeln, die mit der Zeit unbegränzt wachsen. Es ist also ein Zeichen, dass wir von einer solchen Gleichgewichtslage ausgiengen, wenn alle p^2 positiv ausfallen.

Die Grösse b_i ist in (g') als bekannt angesehen und zwar bestimmt mittelst der (h'). Daraus folgt aber sofort, dass dieselbe auch von dem Werthe von p mit abhängt, jedoch vollständig bekannt ist, wenn p bekannt ist. Von E und q kann man dasselbe nicht aussagen, es bleiben vielmehr diese Grössen vorläufig ganz willkürlich. Sind nun

$$p^{(1)},\ p^{(2)},\ \ldots\ldots,\ p^{(m)}$$

die reellen und positiven Werthe von p, die aus (i) folgen, so kann man jeden dieser Werthe in (g) einsetzen, und einen Werth von α_i erhalten, welcher der (89) genügt.

Wegen der l i n e a r e n Form dieser Gleichungen genügt aber dann auch die Summe aller so erhaltenen Werthe. Daraus folgt, dass man haben wird:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= E^{(1)} b_1^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_1^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \dots \\
&\qquad + E^{(m)} b_1^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}), \\
\alpha_2 &= E^{(1)} b_2^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_2^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \dots \\
&\qquad + E^{(m)} b_2^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}), \\
&\vdots \\
\alpha_m &= E^{(1)} b_m^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_m^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \dots \\
&\qquad + E^{(m)} b_m^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}),
\end{aligned}\right\} \quad (G)$$

in welchen Gleichungen $E^{(s)}$, $q^{(s)}$ die dem Werthe $p^{(s)}$ zugehörigen (vorläufig noch willkürlichen) Werthe von E, q sind, und wo $b_i^{(s)}$ der bestimmte und bekannte Werth von b_i für $p = p^{(s)}$ ist.

Die Grössen E und q in (G) sind der Zahl nach 2m (wenn die m Werthe von p alle verschieden sind), wie diess die (89) fordern, wenn man das allgemeine Integralsystem derselben will gefunden haben. Ihre wirklichen Werthe bestimmen sich aus dem Anfangszustande des Systems, d. h. aus den (2m) anfänglichen Werthen von α und $\frac{d\alpha}{dt}$.

Wäre der Anfangszustand so, dass selbst bei imaginären p die entsprechenden E aus (G) Null werden, so wären sogar bei dieser Lage, die nicht der Gleichgewichtslage des §. 12, VI zugehört, kleine Schwingungen möglich, doch würde bei geändertem Anfangszustande diess sofort wieder aufhören.

Periodische Schwingungen.

III. Sind alle Werthe von p reell, oder sind aus (G) diejenigen Glieder weggefallen, die imaginären Werthen von p entsprechen würden, so nimmt jedes der betreffenden Glieder seinen vorigen Werth wieder an, wenn t um $\frac{2\pi}{p}$ wächst.

Sind also die Grössen

$$\frac{2\pi}{p^{(1)}}, \quad \frac{2\pi}{p^{(2)}}, \; \dots\dots, \; \frac{2\pi}{p^{(m)}} \qquad (k)$$

alle in der einen ϱ enthalten, so kehrt je nach Umfluss der Zeit ϱ das System wieder in denselben Zustand zurück. Dann ist ϱ die Dauer einer Schwingung (oder auch mehrerer). Dabei ist selbstverständlich, dass in (k) nur diejenigen p in Betracht kommen, die in den (G) vorkommen.

Gleichzeitigkeit der kleinen Schwingungen.

IV. Für jeden Werth von p gibt es in (g') einen Werth von α_i, der den (89) genügt. Die durch diesen Werth dargestellte Bewegung, die eine

periodische ist, wenn p reell, könnte also ganz allein bestehen und man hätte dann

$$\alpha_1 = E\,b_1 \sin(p\,t + q),\ \alpha_2 = E\,b_2 \sin(p\,t + q),\ + \ldots\ldots,$$
$$\alpha_m = E\,b_m \sin(p\,t + q), \qquad \text{(m)}$$

oder

$$\frac{\alpha_1}{b_1} = \frac{\alpha_2}{b_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{b_m} = E \sin(p\,t + q),$$

durch welche Gleichung dieser Bewegungszustand gegeben wäre. Eben so könnte jede durch einen andern der zulässigen Werthe von p bestimmte periodische Bewegung allein bestehen. Aus den (G) folgt, dass die wirkliche Bewegung so beschaffen ist, als wenn alle diese einzelnen Bewegungen zu gleicher Zeit stattfänden, wobei sie also einfach addirt sind. Damit ist aber keineswegs ausgesprochen, dass in Wirklichkeit die Dinge sich so verhalten, d. h. dass die einzelnen Schwingungen gewissermassen einzeln auftreten, also auch die ihnen entsprechenden Töne einzeln wahrnehmbar sein müssen. Diese Möglichkeit, wenn sie besteht, hängt mit dem Anfangszustande zusammen, und es ist sicher eine falsche Auslegung der Ergebnisse in (G), wenn man die einzelnen Glieder kurzweg als vereinzelt auftretende Schwingungen ansieht.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich sofort, dass das betrachtete System nicht mehr als m verschiedene Schwingungsweisen haben kann, d. h. dass die (k) alle einzeln möglichen Schwingungsdauern ausdrücken.

Prinzip der Uebereinanderlagerung der Bewegungen.

V. Sind Bewegungszustände durch Gleichungen linearer Form, wie die (89) gegeben, gleichviel ob klein oder gross, so lässt sich ein allgemeiner Satz von denselben aussprechen, den wir schliesslich noch darstellen wollen.

Gesetzt für einen durch

$$\alpha_i = K_i,\ \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i \text{ (für } t = 0) \qquad \text{(n)}$$

bestimmten Anfangszustand genüge den (89)

$$\alpha_i = Z_i; \qquad \text{(p)}$$

für einen durch

$$\alpha_i = K_i',\ \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i' \text{ für } t = 0) \qquad \text{(n')}$$

bestimmten Anfangszustand aber

$$\alpha_i = Z_i'; \qquad \text{(p')}$$

u. s. w., wo Z_i, Z_i', ... bestimmte Funktionen von t sind, so genügt für einen durch

$$\alpha_i = K_i + K_i' + \ldots, \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i + L_i' + \ldots \text{ (für } t = 0) \qquad (q)$$

bestimmten Anfangszustand auch

$$\alpha_i = Z_i + Z_i' + \ldots\ldots \qquad (q')$$

den (89).

Denn da Z_i einzeln den (89) genügen, so genügt auch ihre Summe, wegen der linearen Form dieser Gleichungen. Es ist also nur noch zu zeigen, dass (q′) auch den Anfangszustand ausdrückt, was aber, da

$$K_i = Z_i \,(t = 0), \quad K_i' = Z_i' \,(t = 0), \quad \ldots\ldots,$$

$$L_i = \frac{dZ_i}{dt} (t = 0), \quad L_i' = \frac{dZ_i'}{dt} (t = 0), \quad \ldots\ldots,$$

wegen der (q) ganz offenbar der Fall ist.

Werden also in einem Systeme mehrere einzelne Bewegungen erregt, deren Gesetze durch lineare Gleichungen wie (89) ausgesprochen sind, so gehen diese Bewegungen ungestört durch einander fort, und wo sie zusammentreffen, addiren sie sich einfach, ohne sich in ihrem etwaigen Weiterschreiten im Geringsten zu hemmen.

Dieser Satz hat allerdings Aehnlichkeit mit dem in IV, ist aber nicht derselbe. Hier sind die einzelnen Bewegungen durch den Anfangszustand geradezu als gesondert gegeben, während diess in IV nicht der Fall war.

Auf dem hier angegebenen Satze beruht die Möglichkeit, die verschiedenen Töne einer Musik zu gleicher Zeit wahrnehmen zu können, da die Schallwellen durch lineare Gleichungen bestimmt sind und hier die anfänglichen Erregungen vollständig vereinzelt (wenn auch gleichzeitig) auftreten.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.